

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l'étude des ondes guidées

Anne-Sophie BONNET-BENDHIA et Patrick JOLY

Cours MAE 21

Table des matières

1	Différents modèles de guides d'ondes	5
1.1	Modèles classiques de propagation d'onde	5
1.1.1	Les équations de Maxwell	5
1.1.2	Les équations de l'élastodynamique linéaire	6
1.1.3	Les équations de l'acoustique linéaire	7
1.1.4	Les équations de propagation de la houle	8
1.1.5	Présentation d'un problème modèle	9
1.2	Guides d'ondes	11
1.2.1	Définitions	11
1.2.2	Mise en équations	13
1.2.3	Les questions posées	14
1.2.4	L'hypothèse de perturbation locale pour les guides ouverts . . .	15
2	Introduction aux opérateurs non bornés	17
2.1	Opérateurs bornés, non bornés, fermés	17
2.2	Opérateurs compacts	20
2.3	Opérateur adjoint	21
2.4	Opérateurs autoadjoints	24
2.5	Formes hermitiennes et opérateurs autoadjoints	28
2.6	Spectre d'un opérateur - Définitions	29
3	Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints	33
3.1	Caractérisation du spectre	33
3.2	Spectre essentiel et spectre discret	37
3.3	Perturbation compacte	41
3.4	Le Principe du Min-Max	44
3.5	Opérateurs autoadjoints compacts	49
3.6	Opérateurs autoadjoints à résolvante compacte	52
4	Théorie des guides d'ondes fermés	57
4.1	Existence et complétude des modes guidés	57
4.2	Propriétés des modes guidés	61

5	Théorie des guides d'ondes ouverts	65
5.1	Problème modèle - Cadre mathématique	65
5.2	Détermination du spectre essentiel	68
5.3	Principe du Min-Max et courbes de dispersion	71
5.4	Résultats d'existence pour le mode fondamental	73
5.5	Etude des autres modes et notion de seuil	75
6	Calcul numérique des modes guidés d'un guide ouvert	79
6.1	Réduction à un domaine borné	79
6.2	Etude de la non-linéarité	84
6.3	Estimations d'erreur pour le problème semi-discrétisé	87
6.4	Discrétisation par éléments finis	91
6.5	Mise en oeuvre	93

Chapitre 1

Différents modèles de guides d'ondes

1.1 Modèles classiques de propagation d'onde

Nous allons passer en revue quatre modèles de propagation d'onde :

- les équations de Maxwell pour la modélisation des ondes électromagnétiques
- les équations de l'élastodynamique pour la propagation des ondes élastiques dans un solide
- les équations de l'acoustique pour la propagation des ondes sonores dans un fluide
- les équations de Cauchy Poisson pour la modélisation de la houle

Il n'est pas question ici de présenter en détails la manière dont sont établies ces équations ou la physique sous-jacente. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages de référence en la matière :

- pour l'électromagnétisme à [9], [12]
- pour l'élasticité et l'acoustique à [13], [2], [3]
- pour la propagation de la houle à [22]

Par ailleurs nous ne prétendons pas dans ce premier chapitre à la rigueur mathématique. Il s'agit avant tout d'introduire des concepts et de sensibiliser à certaines idées de base, les équations étant manipulées formellement. Nous introduirons dans les chapitres suivants les notions d'analyse fonctionnelle nécessaires à une étude théorique rigoureuse.

Dans tout ce qui suit, $\tilde{\Omega}$ désignera le milieu de propagation, généralement tridimensionnel et $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$ le point courant de $\tilde{\Omega}$, la variable t désignant le temps. Lorsque $\tilde{\Omega} \neq \mathbb{R}^3$ on désignera par $\tilde{\Gamma}$ la frontière de $\tilde{\Omega}$.

1.1.1 Les équations de Maxwell

Les inconnues du problème sont dans ce cas :

- le champ électrique $E(x, t) \in \mathbb{R}^3$
- le champ magnétique $H(x, t) \in \mathbb{R}^3$

- l'induction électrique $D(x, t) \in \mathbb{R}^3$
- l'induction magnétique $B(x, t) \in \mathbb{R}^3$

Ces champs obéissent, en l'absence de charges et de courants, aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} &= -\operatorname{rot} E \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \operatorname{rot} H \\ \operatorname{div} D &= 0 \\ \operatorname{div} B &= 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

et sont par ailleurs reliés par les lois de comportement :

$$\begin{cases} B(\tilde{x}, t) &= \mu(\tilde{x})H(\tilde{x}, t) \\ D(\tilde{x}, t) &= \varepsilon(\tilde{x})E(\tilde{x}, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\mu(\tilde{x})$ est la perméabilité magnétique et $\varepsilon(\tilde{x})$ la permittivité diélectrique du milieu. Nous nous limiterons au cas où $\mu(\tilde{x})$ et $\varepsilon(\tilde{x})$ sont des scalaires positifs. Ils caractérisent le comportement électromagnétique du matériau dans lequel l'onde se propage. Les variations en \tilde{x} décrivent l'éventuelle hétérogénéité du milieu. Le lecteur vérifiera aisément que l'on peut éliminer B , D et H entre les équations (1.1) et (1.2) pour aboutir à une formulation où seul le champ électrique E apparaît :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} E) = 0. \quad (1.3)$$

Lorsque le domaine $\tilde{\Omega}$ a un bord $\tilde{\Gamma}$, il faut adjoindre à l'équation précédente une condition aux limites, par exemple la condition dite "de conducteur parfait" :

$$E \wedge \tilde{n} |_{\tilde{\Gamma}} = 0$$

où \tilde{n} désigne le vecteur unitaire normal à $\tilde{\Gamma}$.

1.1.2 Les équations de l'élastodynamique linéaire

L'inconnue du problème est le champ de déplacements dans le milieu solide occupé par $\tilde{\Omega}$:

$$u(\tilde{x}, t) = (u_1(\tilde{x}, t), u_2(\tilde{x}, t), u_3(\tilde{x}, t)).$$

Les variations de ce champ sont régies par les équations de la mécanique :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

où $\sigma(u)$ désigne le tenseur (en l'occurrence une matrice symétrique) des contraintes associé au champ de déplacements $u(\tilde{x}, t)$ et $\rho = \rho(\tilde{x})$ désigne la densité du matériau.

Il faut adjoindre aux équations d'équilibre (1.4) la loi de comportement du matériau. Dans le cas d'un matériau linéaire isotrope, cette loi est la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad (1.5)$$

où $\varepsilon(u) = \langle\langle \varepsilon_{ij}(u) \rangle\rangle$ désigne le tenseur des déformations (linéarisé) associé au champ de déplacements u :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

et où $\lambda = \lambda(\tilde{x})$, $\mu = \mu(\tilde{x})$ désignent les constantes de Lamé (ou coefficients de Lamé). Les fonctions ρ , λ , μ sont strictement positives et caractérisent le comportement élastique du matériau. Leur variation en fonction de \tilde{x} décrit l'éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation. Signalons que le modèle ((1.4), (1.5), (1.6)) est physiquement valide sous réserve de l'hypothèse de petits déplacements et de petites déformations, hypothèse réaliste pour beaucoup d'applications (prospection sismique, ondes ultrasonores...).

A partir des équations (1.5), il est facile d'obtenir la formulation en déplacements du problème :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div} u) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Sur l'éventuelle frontière $\tilde{\Gamma}$ du domaine $\tilde{\Omega}$, on pourra considérer deux types de conditions aux limites :

– la condition de bord encasté

$$u|_{\tilde{\Gamma}} = 0 \quad (1.8)$$

– la condition de surface libre

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \tilde{n}_j = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

La condition (1.8) n'est autre que la condition de Dirichlet homogène : elle exprime le fait que les points du bord $(\tilde{\Gamma})$ sont immobiles. La condition (1.9) peut être vue comme une condition de Neumann homogène généralisée : elle exprime le fait qu'aucune force de surface extérieure n'est appliquée sur la surface $(\tilde{\Gamma})$. Signalons dès à présent que la condition de surface libre (1.9) joue un rôle fondamental dans le mécanisme des ondes de surface, qui n'existent pas avec la condition de bord encasté.

1.1.3 Les équations de l'acoustique linéaire

Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être vues comme une dégénérescence des équations de l'élastodynamique linéaire lorsque le coefficient de Lamé μ tend vers 0.

En fait, $\mu = 0$ caractérise le comportement élastique d'un fluide, l'autre coefficient de Lamé, λ , restant strictement positif (dans ce contexte, il est souvent noté K et appelé constante d'élasticité). A partir des équations (1.5), il est facile de voir que le tenseur des contraintes devient sphérique, c'est-à-dire proportionnel à la matrice identité. On pose alors :

$$\sigma = -pI \quad (1.10)$$

où $p = p(\tilde{x}, t)$ est par définition la pression du fluide. De (1.5), on déduit :

$$p = -\lambda \operatorname{div} u \quad (1.11)$$

alors que l'équation d'équilibre (1.4) se réécrit simplement :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} p. \quad (1.12)$$

On peut alors éliminer u entre (1.11) et (1.12) pour obtenir l'équation en pression (qui devient alors l'inconnue, scalaire, du problème) :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = 0. \quad (1.13)$$

Sur la frontière $(\tilde{\Gamma})$, si les particules fluides ne peuvent que glisser, alors la composante normale de la vitesse est nulle. Cela se traduit par la condition de Neumann pour p (grâce à (1.12)) :

$$\frac{\partial p}{\partial \tilde{n}_{|\tilde{\Gamma}}} = 0 \quad (1.14)$$

La condition de surface libre quant à elle devient la condition de Dirichlet :

$$p|_{\tilde{\Gamma}} = 0. \quad (1.15)$$

Signalons que les ondes de surface que nous avons évoquées au paragraphe précédent n'existent pas dans les milieux fluides.

1.1.4 Les équations de propagation de la houle

Le modèle que nous allons présenter est censé décrire les mouvements de l'océan. Sa validité est soumise à un certain nombre d'hypothèses physiques, licites quand on s'intéresse à la propagation de la houle :

- l'écoulement est irrotationnel
- le fluide est incompressible
- le fluide est non visqueux
- les déplacements sont petits

La dernière hypothèse devient sujette à caution lorsque la profondeur de l'océan est trop faible. Elle permet de travailler avec les équations linéarisées posées dans un domaine de propagation $\tilde{\Omega}$ supposé fixe. La première particularité du modèle tient dans la géométrie du domaine $\tilde{\Omega}$ nécessairement délimité par deux surfaces $\tilde{\Gamma}_F$ et $\tilde{\Gamma}_L$:

- $\tilde{\Gamma}_F$ représente le fond marin
- $\tilde{\Gamma}_L$ représente la surface moyenne de l'eau (ou surface libre)
- $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_F \cup \tilde{\Gamma}_L$

De plus, le modèle étant un modèle de perturbation par rapport à une situation au repos, la frontière $\tilde{\Gamma}_F$ coïncide, si x_2 désigne la coordonnée verticale, avec une portion du plan $x_2 = 0$.

L'écoulement étant irrotationnel, on en déduit que le champ des vitesses dans le fluide $v(\tilde{x}, t)$ dérive d'un potentiel $\Phi(\tilde{x}, t)$:

$$v = -\text{grad}\Phi. \quad (1.16)$$

L'incompressibilité du fluide se traduit par :

$$\text{div } v = 0. \quad (1.17)$$

On en déduit que la fonction Φ est harmonique dans $\tilde{\Omega}$:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}. \quad (1.18)$$

La condition de glissement sur le fond se traduit par la condition de Neumann pour Φ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{n}}|_{\Gamma_F} = 0. \quad (1.19)$$

C'est seulement au niveau de la condition aux limites sur la surface libre Γ_L que le temps intervient. Cette condition s'obtient à partir de la linéarisation de l'équation de Bernoulli et traduit le fait que la pression à la surface du fluide est égale à la pression atmosphérique :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L. \quad (1.20)$$

Dans (1.20), g est l'accélération de la pesanteur. Cette condition est également appelée *condition de surface libre*. C'est elle, et c'est la deuxième particularité de ce modèle, qui est responsable de la propagation de la houle. Signalons qu'on peut, à partir de Φ , décrire la déformation de la surface de l'eau sous l'effet de la houle comme la surface d'équation :

$$\begin{cases} x_2 = \eta(x_1, x_3, t) \\ \eta(x_1, x_3, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial t}(x_1, x_3, 0, t) \end{cases} \quad (1.21)$$

1.1.5 Présentation d'un problème modèle

Nous allons maintenant définir un problème modèle qui présente toutes les propriétés caractéristiques des problèmes de guides d'ondes que nous serons amenés à considérer dans la suite de ce cours. Ce modèle peut être considéré comme directement issu des équations de l'acoustique (cf. paragraphe 1.1.3). Il s'agit également d'un modèle approché pour l'électromagnétisme (cf. [23], [21]).

Pour décrire ce modèle, nous nous donnons :

– Un milieu de propagation :

$$\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^3 \quad (1.22)$$

– Deux fonctions mesurables $\rho(\tilde{x})$ et $\mu(\tilde{x})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(\tilde{x}) \leq \rho_+ < +\infty & p.p. \quad \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \\ 0 < \mu_- \leq \mu(\tilde{x}) \leq \mu_+ < +\infty & p.p. \quad \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (1.23)$$

– Une équation de propagation :

$$\rho(\tilde{x}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu(\tilde{x}) \operatorname{grad} U) = 0 \quad (1.24)$$

où $U(x, t)$ est l'inconnue scalaire du problème.

L'équation précédente s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \tilde{\mathbf{A}}U \quad (1.25)$$

où l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ est défini par :

$$\tilde{\mathbf{A}}U = -\frac{1}{\rho(\tilde{x})} \operatorname{div}(\mu(\tilde{x}) \operatorname{grad} U) \quad (1.26)$$

Si l'on considère le produit scalaire :

$$(U, V) = \int_{\tilde{\Omega}} U(\tilde{x}) \bar{V}(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (1.27)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ est un opérateur symétrique et positif, au sens où :

$$\begin{cases} \forall U \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}), \forall V \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}) & (\tilde{\mathbf{A}}U, V) = (U, \tilde{\mathbf{A}}V) \\ \forall U \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}) & (\tilde{\mathbf{A}}U, U) \geq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

On vérifie aisément que si l'on désigne par $U(\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^N$ ($N = 1$ ou 3), l'inconnue du problème qui est :

$$\begin{aligned} \bullet \quad U = E & \quad \text{pour l'électromagnétisme} & N = 3 \\ \bullet \quad U = u & \quad \text{pour l'élastodynamique} & N = 3 \\ \bullet \quad U = p & \quad \text{pour l'acoustique} & N = 1 \end{aligned} \quad (1.29)$$

alors, dans chacun de ces trois cas, l'équation de propagation dans $\tilde{\Omega}$ s'écrit sous la forme (1.24) avec :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}U = \varepsilon \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} U \right) & \text{pour l'électromagnétisme} \\ \left(\tilde{\mathbf{A}}U \right)_i = -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(U)) \quad i = 1, 2, 3 & \text{pour l'élastodynamique} \\ \tilde{\mathbf{A}}U = -\frac{1}{K} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} U \right) & \text{pour l'acoustique} \end{cases} \quad (1.30)$$

De plus, dans chaque cas, $\tilde{\mathbf{A}}$ désigne un opérateur différentiel du second ordre, formellement autoadjoint et positif, pour un produit scalaire convenablement choisi.

Le problème de la houle joue un rôle un peu particulier : nous verrons dans la suite du cours qu'il peut également s'écrire sous la forme (1.26) mais pour un opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ non différentiel.

1.2 Guides d'ondes

1.2.1 Définitions

Nous allons maintenant décrire une situation type pour laquelle les modèles que nous venons de présenter sont susceptibles de propager des ondes guidées. La première hypothèse concerne le milieu de propagation $\tilde{\Omega}$ qui doit être cylindrique et infini dans la direction du cylindre. Si x_3 désigne cette direction, nous pouvons écrire :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R} \quad (1.31)$$

où Ω désigne la section droite du milieu de propagation. Nous poserons dans la suite :

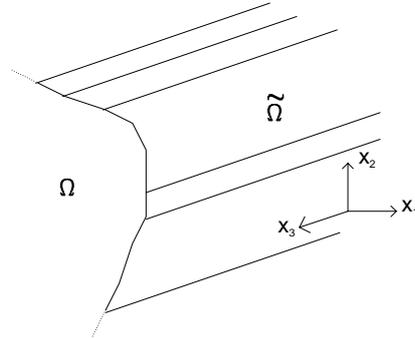


FIGURE 1.1 – Le milieu de propagation

$$\begin{cases} \tilde{x} = (x, x_3) \\ x = (x_1, x_2) \in \Omega \end{cases} \quad (1.32)$$

De même nous poserons s'il y a lieu :

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \times \mathbb{R} \text{ où } \Gamma = \partial\Omega. \quad (1.33)$$

La seconde hypothèse que nous ferons concerne les coefficients caractéristiques du milieu auxquels nous imposerons de vérifier les mêmes propriétés d'invariance par translation dans la direction x_3 . Ainsi, nous aurons :

– En électromagnétisme :

$$\varepsilon(x, x_3) = \varepsilon(x) \quad \mu(x, x_3) = \mu(x)$$

– En élasticité :

$$\rho(x, x_3) = \rho(x) \quad \lambda(x, x_3) = \lambda(x) \quad \mu(x, x_3) = \mu(x)$$

– En acoustique :

$$\rho(x, x_3) = \rho(x) \quad K(x, x_3) = K(x)$$

La conséquence essentielle de ces hypothèses est que l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ défini par (1.30) est à coefficients constants en x_3 . Cette propriété jointe aux hypothèses sur la géométrie de $\tilde{\Omega}$ nous autorise à rechercher des solutions à variables séparées de la forme :

$$U(\tilde{x}, t) = u(x)f(x_3)g(t). \quad (1.34)$$

Ici, U représente l'inconnue du problème considéré (cf. (1.29)). Donc $u(x) \in \mathbb{R}^N$ avec $N = 1$ pour le problème modèle, pour l'acoustique et pour l'hydrodynamique, et $N = 3$ pour l'élastodynamique et l'électromagnétisme. De plus, on peut demander aux fonctions f et g de varier de façon harmonique, c'est-à-dire les chercher sous la forme :

$$\begin{cases} f(x_3) & = e^{i\beta x_3} & \beta \in \mathbb{R} \\ g(t) & = e^{-i\omega t} & \omega \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.35)$$

Remarque 1.1 *C'est l'utilisation de la transformée de Fourier par rapport aux variables x_3 et t qui permet a posteriori de justifier ce choix. On montre en effet que toute solution physiquement admissible peut s'écrire comme la "superposition" de solutions de la forme (1.34-1.35).*

Définition 1.1 *On appelle "mode" toute solution des équations du modèle s'écrivant sous la forme :*

$$U(x, x_3, t) = u(x)e^{i(\beta x_3 - \omega t)} \quad (1.36)$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

Remarquons que l'on peut interpréter (1.36) comme une onde se propageant sans déformation dans la direction x_3 à la vitesse $c = \frac{\omega}{\beta}$. En effet :

$$U(x, x_3 + L, t) = U\left(x, x_3, t - \frac{L}{c}\right). \quad (1.37)$$

Ainsi la fonction $u(x)$ décrit la répartition de l'amplitude de l'onde dans la section transverse. Avant d'aller plus loin, nous rappelons la terminologie classique :

Définition 1.2

- ω est la pulsation de l'onde
- β est la constante de propagation du mode
- $\beta x_3 - \omega t$ est la phase
- $c = \frac{\omega}{\beta}$ est la vitesse de phase
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période de l'onde

– $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ est la longueur de l'onde

Notons que λ et T sont reliés par la relation $\lambda = cT$. Autrement dit, la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période.

Remarque 1.2

1° Dans la suite, nous parlerons souvent de "fréquence ω ". En toute rigueur, ce terme est impropre puisque la fréquence est définie par $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

2° β est parfois appelé le nombre d'onde dans la direction x_3

Définition 1.3

Un mode est dit guidé si :

$$u \in (L^2(\Omega))^N. \quad (1.38)$$

Un mode qui n'est pas guidé est appelé un mode de radiation.

Ainsi, un mode guidé est tel que son énergie transverse est finie. Dans le cas où Ω est borné, cette condition est peu contraignante. On montre d'ailleurs dans ce cas que tous les modes sont guidés. En revanche, dans le cas où Ω est non borné, cette condition prend un caractère essentiel. Elle impose à l'énergie transverse de l'onde d'être localisée dans une région bornée de la section transverse Ω .

Ces remarques nous amènent à faire la distinction suivante :

Définition 1.4 On dira que le guide d'onde est fermé (resp. ouvert) si la section transverse Ω du milieu de propagation est bornée (resp. non bornée).

Le lecteur aura compris que l'étude des guides ouverts est mathématiquement beaucoup plus délicate que celle des guides d'ondes fermés. Il est d'ailleurs une différence remarquable entre un guide ouvert et un guide fermé :

- Dans un guide fermé, les modes guidés existent toujours. Tous les modes sont guidés et il en existe une infinité dénombrable.
- Dans un guide ouvert, les modes guidés peuvent exister ou ne pas exister, suivant la nature du milieu de propagation. En revanche, il existe toujours des modes de radiation.

Cependant, nous verrons qu'il existe un point commun essentiel entre guides d'ondes ouverts et fermés, à savoir le fait que, pour qu'une fonction de la forme (1.36) soit un mode guidé, il faut que ω et β soient reliés par une relation appelée "relation de dispersion".

1.2.2 Mise en équations

Considérons pour fixer les idées le problème modèle présenté au paragraphe 1.1.5. L'hypothèse d'invariance par translation dans la direction x_3 se traduit dans ce cas par :

$$\begin{cases} \rho(x, x_3) &= \rho(x) & (x, x_3) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ \mu(x, x_3) &= \mu(x) & (x, x_3) \in \Omega \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.39)$$

De plus, nous définissons :

- le guide d'ondes ouvert modèle : $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- le guide d'ondes fermé modèle : Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et U satisfait la condition de Dirichlet homogène sur $\tilde{\Gamma}$.

En injectant (1.36) dans l'équation (1.24), on montre que u doit être solution de l'équation

$$A(\beta)u = \omega^2 u \text{ dans } \Omega \quad (1.40)$$

où

$$A(\beta)u = \frac{1}{\rho} (-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \beta^2 u) \quad (1.41)$$

les opérateurs div et grad désignant désormais les opérateurs usuels dans le plan (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} \operatorname{grad} \varphi & = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

Si le guide est fermé, on a de plus :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.42)$$

Nous avons donc réduit le problème de la recherche des modes guidés au problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \neq 0, u \in L^2(\Omega), \omega \in \mathbb{R}, \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ A(\beta)u = \omega^2 u \text{ dans } \Omega \\ \text{et si } \Gamma \neq \emptyset : u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Il s'agit d'un problème de valeurs propres posé dans le plan. En effet, à β fixé, ω^2 est **valeur propre** de l'opérateur $A(\beta)$ et u est la **fonction propre** associée. Ainsi, le nombre β apparaît comme un paramètre alors que la fréquence ω apparaît comme un inconnue. Ceci va conduire à écrire l'équation de dispersion sous la forme $\omega = F(\beta)$. Signalons toutefois que dans certaines applications physiques, c'est le problème inverse qui est posé : ω est donné et β est l'inconnue recherchée.

1.2.3 Les questions posées

Maintenant que nous avons formulé le problème mathématiquement, précisons les questions auxquelles nous allons tenter de donner des réponses sur le plan mathématique ou/et numérique.

▷ Existence de solutions

La première question est bien-sûr celle de l'existence de modes guidés, ou, de manière équivalente, la question de l'existence de valeurs propres pour l'opérateur $A(\beta)$. Dans

le cas d'un guide ouvert, il s'agit d'un problème difficile qui consiste à trouver des conditions suffisantes d'existence portant sur les coefficients caractéristiques du milieu.

▷ Nombre de solutions. Notion de seuil.

Plus précisément, on peut s'interroger sur le nombre de modes guidés existants. Encore une fois, c'est dans le cas des guides d'ondes ouverts que cette question est à la fois pertinente et délicate. Le nombre β jouant le rôle d'un paramètre, ce nombre est a priori une fonction $N(\beta)$. Les valeurs de β correspondant à l'apparition d'un nouveau mode (valeurs pour lesquelles la fonction $N(\beta)$ est discontinue) sont appelés **seuils** ou **valeurs de coupure**. Les seuils constituent un sujet d'étude important, étroitement relié à l'étude de la fonction $N(\beta)$.

▷ Courbes de dispersion.

Les valeurs propres ω^2 de $A(\beta)$ lorsqu'elles existent décrivent, lorsque β varie, des courbes appelées **courbes de dispersion**. L'une des questions que nous traiterons sera l'étude qualitative de ces courbes : leur régularité (continuité, différentiabilité), leur monotonie et éventuellement, leurs comportements limites à haute fréquence (lorsque β tend vers l'infini) ou à basse fréquence (lorsque β tend vers 0).

▷ Calcul numérique des modes guidés

Nous nous intéresserons enfin aux méthodes numériques permettant d'approcher les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur $A(\beta)$. Pour les guides ouverts, le problème à résoudre est posé a priori dans un domaine non borné du plan. Afin de pouvoir mettre en oeuvre une méthode d'éléments finis, une première étape consistera à écrire une formulation équivalente du problème dans un domaine borné. Nous verrons que ceci introduit une non-linéarité par rapport à la valeur propre à calculer. Nous nous attacherons à étudier cette non-linéarité et nous chercherons à établir des estimations d'erreur.

1.2.4 L'hypothèse de perturbation locale pour les guides ouverts

En ce qui concerne les guides ouverts, on ne sait pas encore traiter un milieu quelconque et il faut faire une hypothèse supplémentaire sur la section transverse du milieu de propagation. En effet, on demandera à celle-ci d'être une perturbation locale d'un milieu de référence simple. Par *milieu de référence simple*, nous entendons milieu pour lequel les calculs peuvent être menés "à la main". En pratique, cela signifie un milieu dans lequel on peut trouver des solutions à variables séparées.

Dans le cadre de ce cours, nous nous bornerons au cas où le milieu de référence est homogène avec pour section droite $\Omega = \mathbb{R}^2$ (sauf dans le cas de l'hydrodynamique comme on le verra plus loin). Dans un tel milieu, on peut montrer, quel que soit le modèle considéré, qu'il n'existe pas d'onde guidée. En revanche, il existe des modes de radiation, généralement appelés *ondes planes*. A titre d'exemple, citons le cas de

l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad (1.44)$$

qui admet des solutions de la forme :

$$U(\tilde{x}, t) = \alpha e^{i(\beta x_3 - \omega t + k \cdot x)} \text{ avec } k_1^2 + k_2^2 + \beta^2 = \omega^2.$$

Une telle solution n'est toutefois pas un mode guidé puisque l'amplitude

$$u(x) = \alpha e^{ik \cdot x}$$

n'est pas de carré intégrable.

Il est donc clair que la perturbation, évoquée plus haut, va jouer un rôle essentiel dans le mécanisme de guidage des ondes. Par perturbation locale, nous voulons dire que les équations et la géométrie du problème coïncident, sauf peut-être dans une région bornée de la section transverse Ω , avec celles du milieu de référence. Mathématiquement, cette hypothèse nous permettra d'avoir recours à des techniques dites de *perturbations compactes*.

Ainsi par exemple, dans le cas du problème modèle, nous ferons les hypothèses suivantes :

– Pour le milieu de référence :

$$\mu(x) = \mu_\infty, \quad \rho(x) = \rho_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

– Pour le milieu perturbé :

$$\exists R > 0 \text{ tel que } |x| > R \implies \mu(x) = \mu_\infty, \quad \rho(x) = \rho_\infty.$$

Chapitre 2

Introduction aux opérateurs non bornés

2.1 Opérateurs bornés, non bornés, fermés

On considère deux espaces de Hilbert E et F dont les normes et produits scalaires sont notés : $\|\cdot\|_E, (\cdot, \cdot)_E, \|\cdot\|_F, (\cdot, \cdot)_F$.

Soit $D(A)$ un sous-espace vectoriel de E et A une application (un *opérateur*) linéaire de $D(A)$ dans F .

On dit que A est un opérateur *borné* de E dans F si $D(A) = E$ et si il existe C tel que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \quad \forall u \in E. \quad (2.1)$$

On pose alors :

$$\|A\| = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}.$$

Si $D(A) \neq E$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \quad \forall u \in D(A), \quad (2.2)$$

alors l'opérateur A se prolonge en un opérateur borné de $\overline{D(A)}$ dans F , où $\overline{D(A)}$ désigne l'adhérence de $D(A)$ dans E .

En particulier, un opérateur de domaine dense $D(A)$ vérifiant (2.2) se prolonge en un opérateur borné sur E .

On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des opérateurs bornés de E dans F (resp. de E dans E). C'est un espace vectoriel. Muni de la norme $\|\cdot\|$, c'est un espace de Banach. Enfin, une caractérisation très utile de $\|A\|$ est la suivante (exercice!) :

$$\forall A \in \mathcal{L}(E, F) \quad \|A\| = \sup_{u \in E, v \in F} \frac{(Au, v)_F}{\|u\|_E \|v\|_F}.$$

On dit que A est un opérateur *non borné* s'il n'existe pas de constante C telle que (2.2) soit satisfait. En d'autres termes, A est non borné si et seulement si il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Au_n\|_F = +\infty.$$

Remarque 2.1 *En fait, la propriété (2.1) signifie exactement que A est continu de E dans F . Autrement dit, un opérateur borné de E dans F est continu de E dans F . Nous verrons ci-dessous (cf. théorème 2.1) que pour une large catégorie d'opérateurs appelés les opérateurs fermés, un opérateur tel que $D(A) = E$ est nécessairement borné. Pour cette raison, de nombreux auteurs appellent opérateur non borné tout opérateur A tel que $D(A) \neq E$.*

Exemple 2.1 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $E = F = L^2(\Omega)$ et $f \in L^\infty(\Omega)$. L'opérateur A défini par :

$$Au = fu \quad \forall u \in L^2(\Omega),$$

est borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ puisque :

$$\|fu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Exemple 2.2 : On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par :

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } xu \in L^2(\mathbb{R})\}$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite u_n de $D(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \text{ ou } x > n + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet : $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|Au_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{3n^2 + 3n + 1}{3}}$.

Exemple 2.3 : On suppose maintenant $E = F = L^2(0, 1)$ et on considère l'opérateur A défini par :

$$D(A) = \left\{ u \in L^2(0, 1) \text{ tel que } \frac{du}{dx} \in L^2(0, 1) \right\}$$

$$\forall u \in D(A) \quad Au = \frac{du}{dx}$$

Alors A est un opérateur non borné (On peut considérer la suite $u_n(x) = e^{inx}$). On remarque que $D(A)$ n'est rien d'autre que l'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$.

On peut ajouter un opérateur borné à un opérateur non borné. Plus précisément, si $(A, D(A))$ est non borné de E dans F et $B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on définit l'opérateur non borné $A + B$ de domaine $D(A + B) = D(A)$ par :

$$\forall u \in D(A) \quad (A + B)u = Au + Bu.$$

Il est clair que $A + B$ est effectivement un opérateur non borné car sinon $A = (A + B) - B$ serait borné.

Ceci sera utilisé implicitement dans la suite pour définir l'opérateur $A - \lambda I$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On peut définir une relation d'ordre sur l'ensemble des opérateurs non bornés. On dit que $B : D(B) \subset E \rightarrow F$ prolonge $A : D(A) \subset E \rightarrow F$, ou que B est une extension de A , si et seulement si $D(A) \subset D(B)$ et $\forall u \in D(A) \quad Bu = Au$. On note alors $A \subset B$.

Définition 2.1 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est dit fermé si son graphe $G(A) = \{(u, Au) ; u \in D(A)\}$ est fermé dans $E \times F$.*

On a implicitement muni $E \times F$ de la norme produit :

$$\forall (u, v) \in E \times F \quad \|(u, v)\|_{E \times F}^2 = \|u\|_E^2 + \|v\|_F^2.$$

Autrement dit, A est fermé si, pour toute suite u_n de $D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans E et $Au_n \rightarrow v$ dans F , on a : $u \in D(A)$ et $Au = v$.

On notera aussi que dire que A est fermé équivaut à dire que $D(A)$ muni de la norme dite "du graphe" :

$$\|u\|_{D(A)}^2 = \|u\|_E^2 + \|Au\|_F^2$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 2.2 *Tout opérateur borné est fermé.*

Exemple 2.4 : L'opérateur A de l'exemple 2.3 est un opérateur fermé. En effet, si $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(0, 1)$ et $\frac{du_n}{dx} \rightarrow v$ dans $L^2(0, 1)$, alors il est clair que u_n est une suite de Cauchy dans

$H^1(0, 1)$ (qui est un espace complet). Par conséquent, $u \in H^1(0, 1)$ et $v = \frac{du}{dx}$.

Si on modifie $D(A)$, A peut très bien devenir non fermé. On peut par exemple choisir $D(A) = \mathcal{C}^1(0, 1)$. Alors la suite $u_n \in D(A)$ définie par :

$$u_n(x) = \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

converge dans $H^1(0, 1)$ vers $u(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$. Cela signifie que les suites u_n et Au_n convergent toutes deux dans E et pourtant $u \notin \mathcal{C}^1(0, 1)$. A n'est donc pas fermé. Le domaine a été choisi "trop petit".

Notons :

$$\begin{aligned} \text{Ker } A &= \{u \in D(A); Au = 0\} \\ \text{Im } A &= \{Au; u \in D(A)\} \end{aligned}$$

de sorte que $\text{Ker } A$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im } A$ un sous-espace vectoriel de F . On dit que $\text{Ker } A$ est le noyau de A et $\text{Im } A$ son image. De plus :

Lemme 2.1 *Si $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est un opérateur fermé, alors $\text{Ker } A$ est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $u_n \in \text{Ker } A$ une suite convergeant vers u dans E . Alors la suite Au_n est convergente puisqu'elle est identiquement nulle. Comme A est fermé, on en déduit que $u \in D(A)$ et $Au = 0$. □

Lemme 2.2 *Si $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F , alors A^{-1} est également fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $u_n \in F$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans F et $A^{-1}u_n \rightarrow v$ dans E . Posons : $w_n = A^{-1}u_n$. Alors $w_n \rightarrow v$ dans E et $Aw_n \rightarrow u$ dans F . Comme A est fermé, il en résulte que $v \in D(A)$ et $Av = u$, soit $v = A^{-1}u$. □

Nous allons maintenant énoncer sans le démontrer un théorème essentiel, du à Banach, et qui constitue une sorte de réciproque de la remarque 2.2 :

Théorème 2.1 (Théorème du graphe fermé) : *Soit A un opérateur de E dans F dont le domaine est égal à E et qui est un opérateur fermé, alors A est borné de E dans F .*

Autrement dit, si $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est un opérateur non borné et fermé, alors on a nécessairement $D(A) \neq E$.

On déduit directement du lemme 2.2 et du théorème 2.1 le

Théorème 2.2 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F , alors A^{-1} est borné de F dans E .*

2.2 Opérateurs compacts

Nous avons vu que les opérateurs bornés de E dans F sont caractérisés par le fait que l'image de la boule unité fermée de E , notée $B_E(O, 1)$, est bornée. Si cette image est de plus d'adhérence compacte, on dit que l'opérateur est compact :

Définition 2.2 *Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement si l'une de ces deux propositions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. L'image par A de $B_E(O, 1)$ est d'adhérence compacte.
2. De toute suite (u_n) bornée dans E , on peut extraire une sous-suite (u'_n) telle que la suite (Au'_n) converge dans F .

Désignons par $\mathcal{K}(E; F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$) l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F (resp. dans E). On démontre (cf. [8]) que $\mathcal{K}(E; F)$ est un sous-espace fermé, donc de Banach, de $\mathcal{L}(E; F)$.

Exemple 2.5 : On sait que dans un espace de dimension finie, les ensembles fermés bornés sont compacts. Il est donc clair que si l'image de A , $Im A$, est de dimension finie, A est compact. On dit alors que A est de **rang fini**.

On démontre (cf.[8]) le

Théorème 2.3 *Tout opérateur $A \in \mathcal{K}(E; F)$ est limite au sens de $\mathcal{L}(E; F)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Exemple 2.6 : Soit E un espace de Hilbert séparable, (e_n) une base hibertienne de E et (λ_n) une suite de scalaires tels que $\lambda_n \rightarrow 0$. Alors l'opérateur A défini par :

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

est compact. En effet, soit A_N l'opérateur de rang fini défini par :

$$\begin{aligned} A_N e_n &= A e_n & \text{si } n \leq N \\ A_N e_n &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors on a, pour tout $u \in E$:

$$\|(A - A_N)u\|_E^2 = \sum_{n>N}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |(u, e_n)_E|^2 \leq |\lambda_{N+1}|^2 \|u\|_E^2.$$

Donc :

$$\|A - A_N\| \leq |\lambda_{N+1}|.$$

Par conséquent, $A_N \rightarrow A$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Nous verrons au chapitre suivant que, en ce qui concerne les opérateurs autoadjoints compacts, la situation décrite par cet exemple est caractéristique.

2.3 Opérateur adjoint

Définition 2.3 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur dont le domaine $D(A)$ est dense dans E . On appelle adjoint de l'opérateur A l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F \rightarrow E$ défini par :*

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{v \in F \text{ tel que } \exists w \in E; (v, Au)_F = (w, u)_E \quad \forall u \in D(A)\} \\ A^*v &= w \end{aligned}$$

L'unicité de w résulte de la densité de $D(A)$ dans E . Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F et que A^* est un opérateur linéaire.

Par définition, on a toujours :

$$(v, Au)_E = (A^*v, u)_F \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*). \quad (2.3)$$

Remarque 2.3 *On peut aussi définir $D(A^*)$ de la façon suivante :*

$$D(A^*) = \{v \in F; \exists c > 0 \text{ tel que } |(v, Au)_F| \leq c\|u\|_E \quad \forall u \in D(A)\}.$$

En effet, soit $v \in D(A^)$ défini ainsi. Alors l'application de $D(A)$ dans \mathbb{R} qui à u associe $(v, Au)_F$ se prolonge par densité de $D(A)$ dans E en une forme linéaire continue sur E . Par le théorème de Riesz, il existe donc $w \in E$ tel que :*

$$(v, Au)_F = (w, u)_E \quad \forall u \in D(A).$$

On retrouve ainsi la première définition.

On vérifie aisément le résultat suivant :

Lemme 2.3 *Si A est borné, alors A^* est également borné et $\|A\| = \|A^*\|$.*

De plus, on a le

Lemme 2.4 *A^* est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit v_n une suite de $D(A^*)$ telle que $v_n \rightarrow v$ dans F et $A^*v_n \rightarrow u$ dans E . Alors, on a, par définition de l'adjoint :

$$\forall w \in D(A) \quad (v_n, Aw)_F = (A^*v_n, w)_E.$$

D'où, par passage à la limite :

$$\forall w \in D(A) \quad (v, Aw)_F = (u, w)_E,$$

ce qui signifie exactement que $v \in D(A^*)$ et que $A^*v = u$.

□

On peut se demander si l'opérateur adjoint A^* a un domaine dense. La réponse est oui lorsque A est fermé :

Lemme 2.5 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur fermé. Alors $D(A^*)$ est dense dans E et A^{**} est une extension de A .*

DÉMONSTRATION. Soit $v \in D(A^*)^\perp$. Comme A est fermé, son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$ et l'on peut donc parler de la projection orthogonale P de $E \times F$ sur $G(A)$. Notons X et Y les vecteurs de $E \times F$ définis comme suit : $X = (0, v)$ et $Y = X - PX$. Le vecteur Y est de la forme $Y = (w, z)$ avec $w \in E$ et $z \in F$. Comme Y est orthogonal à $G(A)$, on a :

$$\forall u \in D(A) \quad (u, w)_E + (Au, z)_F = 0.$$

Par conséquent, $z \in D(A^*)$. Donc $(z, v)_F = 0$. Mais par ailleurs :

$$(z, v)_F = (X, Y)_{E \times F} = (Y, Y)_{E \times F}.$$

Donc $Y = 0$, ce qui signifie que $X \in G(A)$ et donc que $v = 0$. Ceci prouve que $D(A^*)$ est dense.

Considérons alors l'adjoint de A^* que nous noterons A^{**} . Montrons qu'il constitue une extension de A . Pour tout $u \in D(A)$, on a :

$$\forall v \in D(A^*) \quad (Au, v)_F = (u, A^*v)_E.$$

Ceci signifie exactement que $u \in D(A^{**})$ et que $A^{**}u = Au$. □

On peut également vérifier (exercice!) que si B est une extension de A , alors A^* est une extension de B^* .

Nous allons maintenant démontrer des relations entre les noyaux et images d'un opérateur et de son adjoint.

Lemme 2.6 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$. Alors :

1. $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$ et $(\text{Ker } A^*)^\perp = \overline{\text{Im } A}$
2. Si de plus l'opérateur A est fermé : $\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^\perp$ et $(\text{Ker } A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}$.

DÉMONSTRATION.

– La première égalité est une conséquence immédiate de la définition de l'adjoint et de (2.3) et la seconde résulte du fait que pour tout sous-espace vectoriel M d'un espace de Hilbert, $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

– Ce point est plus délicat. L'inclusion $\text{Ker } A \subset (\text{Im } A^*)^\perp$, et par suite, en passant aux orthogonaux, $\overline{\text{Im } A^*} \subset (\text{Ker } A)^\perp$, est toujours vraie. Pour démontrer l'inclusion inverse, la difficulté consiste à prouver que $(\text{Im } A^*)^\perp \subset D(A)$.

Soit $u \in (\text{Im } A^*)^\perp$. Montrer que $u \in \text{Ker } A$ équivaut à montrer que $(u, 0) \in G(A)$. Comme A est fermé, ceci revient à montrer que $(u, 0) \in (G(A)^\perp)^\perp$. Autrement dit, il faut montrer que pour tout $(x, y) \in G(A)^\perp$, $(u, x)_E = 0$. Or $(x, y) \in G(A)^\perp$ signifie que pour tout $v \in D(A)$, $(x, v)_E + (y, Av)_F = 0$. Ceci implique que $y \in D(A^*)$ et que $x = -A^*y$. Donc on a bien $(u, x)_E = 0$ puisque $u \in (\text{Im } A^*)^\perp$. □

Exemple 2.7 : Soit A l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= H^1(\mathbb{R}) \\ \forall u \in D(A) \quad Au &= \frac{du}{dx} + u \end{aligned}$$

Alors $v \in D(A^*)$ s'il existe $w \in L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{du}{dx} + u \right) v \, dx = \int_{\mathbb{R}} w u \, dx \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}).$$

Ceci signifie exactement que $v \in H^1(\mathbb{R})$ et que $\frac{dv}{dx} = v - w$. On a donc finalement : $D(A^*) = H^1(\mathbb{R})$ et $A^*v = -\frac{dv}{dx} + v$.

Exemple 2.8 : Soit A l'opérateur non borné de $L^2(0, 1)$ défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in H^2(0, 1); u(0) = u'(0) = 0\} \\ \forall u \in D(A) \quad Au &= -\frac{d^2u}{dx^2} + u \end{aligned}$$

On peut vérifier que son adjoint A^* est défini par :

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{u \in H^2(0, 1); u(1) = u'(1) = 0\} \\ \forall u \in D(A^*) \quad A^*u &= -\frac{d^2u}{dx^2} + u \end{aligned}$$

et que $A^{**} = A$.

2.4 Opérateurs autoadjoints

C'est à cette catégorie d'opérateurs définis ci-dessous que nous nous intéresserons pendant la suite de ce cours.

A partir de maintenant, nous supposons $E = F$.

On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est symétrique si :

$$(Au, v)_E = (u, Av)_E \quad \forall u, v \in D(A). \quad (2.4)$$

Soit A un opérateur de domaine dense et A^* son adjoint. Il est alors facile de vérifier que :

- Si A est symétrique, $A \subset A^*$.
- Si A est symétrique et borné, $A = A^*$.

Définition 2.4 Un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ de domaine dense est dit autoadjoint si $A^* = A$.

Remarque 2.4 L'égalité $A = A^*$ signifie que l'on a à la fois $D(A) = D(A^*)$ et $Au = A^*u$ pour tout $u \in D(A)$. D'après l'identité (2.3), un opérateur autoadjoint vérifie toujours (2.4). Autrement dit, un opérateur autoadjoint est nécessairement symétrique mais la réciproque est fautive. Un opérateur symétrique n'est pas nécessairement autoadjoint et l'on peut avoir :

$$D(A) \subset D(A^*) \quad \text{avec} \quad D(A) \neq D(A^*).$$

Cependant, dans le cas particulier des opérateurs bornés, "symétrique" équivaut à "autoadjoint".

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes qui sont élémentaires :

Si $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ et $B \in \mathcal{L}(E)$ sont autoadjoints, alors $A + B : D(A) \subset E \rightarrow E$ est autoadjoint. En particulier, pour tout λ réel, $A - \lambda I$ est autoadjoint.

Si $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est autoadjoint et bijectif, alors A^{-1} est un opérateur autoadjoint borné de E .

Finalement, si $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est un opérateur autoadjoint et si $A - \lambda I$ est bijectif pour un réel λ , alors $(A - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur autoadjoint borné.

Nous allons maintenant établir une caractérisation très utile de la norme des opérateurs autoadjoints bornés :

Théorème 2.4 *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, alors :*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)_E|}{\|x\|_E^2} = \sup_{\|x\|_E=1} |(Ax, x)_E|$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité $\sup_{\|x\|_E=1} (Ax, x)_E \leq \|A\|$ est évidente. Pour établir l'inégalité inverse, nous allons utiliser le fait que :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E=\|y\|_E=1} (Ax, y)_E. \quad (2.5)$$

Soient x et y tels que $\|x\|_E = \|y\|_E = 1$. Si $(Ax, y) \in \mathbb{R}$, on a l'identité de polarisation suivante :

$$(Ax, y)_E = \frac{1}{4} \{ (A(x+y), (x+y))_E - (A(x-y), (x-y))_E \}.$$

Par conséquent :

$$|(Ax, y)_E| \leq \frac{M}{4} \{ \|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 \} \leq \frac{M}{2} (\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2) = M$$

où l'on a posé

$$M = \sup_{\|x\|_E=1} (Ax, x)_E.$$

Si $(Ax, y)_E = \lambda \notin \mathbb{R}$, alors $\left(A \left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} x \right), y \right)_E \in \mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, l'inégalité :

$$|(Ax, y)_E| \leq M \quad (2.6)$$

reste vraie. Le résultat cherché se déduit finalement de (2.5) et (2.6).

□

Remarque 2.5 *Bien entendu, ce résultat est faux si A n'est pas autoadjoint. Ainsi par exemple, si A est antisymétrique, $(Ax, x)_E = 0$ pour tout $x \in E$.*

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

Corollaire 2.1 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur symétrique de domaine dense vérifiant :

$$|(Ax, x)_E| \leq C, \quad \forall x \in E.$$

Alors A se prolonge en un opérateur borné vérifiant :

$$\|A\| \leq C.$$

En particulier, si $(Ax, x)_E = 0$ pour tout $x \in D(A)$, alors $A = 0$.

Des lemmes 2.2 et 2.3, on déduit immédiatement le

Lemme 2.7 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors A est fermé et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Ker } A &= (\text{Im } A)^\perp \\ \overline{\text{Im } A} &= (\text{Ker } A)^\perp \end{aligned}$$

On a donc la décomposition orthogonale suivante :

$$E = \text{Ker } A \oplus \overline{\text{Im } A}.$$

On a aussi le

Lemme 2.8 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et X un sous espace de $D(A)$ stable par A i.e. $AX \subset X$. Alors l'image par A de $X^\perp \cap D(A)$ est contenue dans X^\perp .

DÉMONSTRATION. Soit $u \in X^\perp \cap D(A)$ et $v \in X$. Alors : $(Au, v)_E = (u, Av)_E = 0$ car $Av \in X$. Ceci étant vrai pour tout $v \in X$, on en déduit que $Au \in X^\perp$.

□

Exemple 2.9 :

1° L'opérateur borné défini dans l'exemple 2.1 est clairement symétrique et donc autoadjoint.

2° Considérons l'opérateur non borné $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ suivant : $D(A) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\forall u \in D(A)$, $Au(x) = xu(x)$. Il est clairement symétrique puisque :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} (xu(x))v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)(xv(x)) dx.$$

En revanche, on vérifie aisément que $D(A^*) = \{v \in L^2(\mathbb{R}); xv(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Autrement dit $D(A)$ est strictement inclus dans $D(A^*)$ et A n'est donc pas autoadjoint. La raison en est que l'on a choisi un domaine "trop petit" pour A . En effet, l'opérateur défini dans l'exemple 2.2 est quant à lui parfaitement autoadjoint.

Exemple 2.10 : Considérons maintenant l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini ainsi :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ \forall u \in D(A) \quad Au &= -\Delta u \end{aligned}$$

On vérifie aisément (en utilisant la transformée de Fourier) que $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on a la formule de Green classique :

$$\forall u, v \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta v) \, dx$$

L'opérateur A est donc symétrique et de domaine dense (puisque $H^2(\mathbb{R}^n)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$). Montrons qu'il est autoadjoint : soit $v \in D(A^*)$. Alors il existe $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall u \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} uw \, dx.$$

Ceci entraîne que $-\Delta v = w$ et donc que $v \in D(A)$.

Pour démontrer sans peine qu'un opérateur symétrique est autoadjoint, nous aurons souvent recours à la caractérisation suivante :

Théorème 2.5 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur symétrique tel que $\text{Im}(A+I) = E$. Alors le domaine de A est dense dans E et A est autoadjoint.*

DÉMONSTRATION. 1° Montrons tout d'abord que $D(A)$ est dense dans E . Cela équivaut à prouver que $D(A)^\perp = \{0\}$. Soit donc $w \in D(A)^\perp$. Par hypothèse, il existe $z \in D(A)$ tel que $Az + z = w$. On a alors :

$$(w, u)_E = (Az + z, u)_E = (z, Au + u)_E = 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Il en résulte que $z \in (\text{Im}(A+I))^\perp$ donc $z = w = 0$.

2° Pour montrer que A est autoadjoint, il suffit de prouver l'inclusion suivante : $D(A^*) \subset D(A)$. Soit donc $v \in D(A^*)$. Par hypothèse, il existe $z \in D(A)$ tel que : $Az + z = A^*v + v$. On a alors :

$$\forall u \in D(A) \quad (v, Au + u)_E = (A^*v + v, u)_E = (Az + z, u)_E = (z, Au + u)_E.$$

Il en résulte que $v = z$ et donc $v \in D(A)$. □

Exemple 2.11 : Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^n . Considérons l'opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

$$Au = -\Delta u \quad \forall u \in D(A).$$

Autrement dit, on s'intéresse à l'opérateur Laplacien (on a l'habitude de considérer l'opposé du Laplacien afin d'obtenir un opérateur "positif") muni de conditions aux limites de type *Neumann homogène*. Cet opérateur est symétrique d'après la formule de Green classique :

$$\forall u, v \in D(A) \quad \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx.$$

Il est également autoadjoint. En effet, nous allons montrer que $A + I$ est inversible et l'on pourra donc appliquer le théorème 2.5. Soit $f \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'après les théorèmes de régularité classiques, on a de plus $u \in D(A)$, d'où le résultat. De même, on peut montrer que l'opérateur Laplacien muni de conditions aux limites de type Dirichlet homogène est autoadjoint. Le domaine de l'opérateur est dans ce cas $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En revanche, si l'on pose :

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

alors on vérifie aisément que $D(A^*) = H^2(\Omega)$. Par conséquent A est symétrique mais non autoadjoint et son adjoint A^* n'est pas symétrique! Cette situation déplaisante résulte du fait que l'on a voulu prendre en compte "trop" de conditions aux limites.

Un opérateur autoadjoint $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est maximal symétrique au sens où, si $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ est un opérateur symétrique qui prolonge A ($A \subset B$) alors nécessairement $B = A$. En effet, on a alors $B \subset B^*$ car B est symétrique et $B^* \subset A^* = A$. D'où :

$$A \subset B \subset B^* \subset A.$$

La réciproque est fautive : il existe des opérateurs maximaux symétriques non autoadjoints.

2.5 Formes hermitiennes et opérateurs autoadjoints

Les problèmes auxquels nous nous intéresserons dans la suite de ce cours seront souvent posés sous forme variationnelle. Il nous faut donc préciser le lien qui existe entre les opérateurs et les formes sesquilineaires.

Soit E un espace de Hilbert et $D(a)$ un sous-espace de E dense dans E . Soit alors a une forme sesquilineaire définie sur $D(a)$. Autrement dit : pour tout $v \in D(a)$, $u \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire sur $D(a)$. et pour tout $u \in D(a)$, $v \mapsto a(u, v)$ est une forme antilinéaire sur $D(a)$. Alors on pose la

Définition 2.5 On appelle opérateur A associé à la forme a l'opérateur de E défini par :

$$u \in D(A) \iff u \in D(a) \text{ et } \exists w \in E \text{ tel que } a(u, v) = (w, v)_E \quad \forall v \in D(a) \\ Au = w$$

Exemple 2.12 : Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^n et posons $E = L^2(\Omega)$, $D(a) = H^1(\Omega)$ et $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, pour tous $u, v \in D(a)$. Alors on vérifie aisément (en reprenant les arguments de l'exemple 2.11) que l'opérateur A associé à a est l'opérateur de Neumann introduit dans l'exemple 2.11.

Il est clair que A est symétrique dès que a est hermitienne (i.e. $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$). C'est le cas dans l'exemple précédent.

Nous allons maintenant donner une condition suffisante portant sur a pour que A soit autoadjoint.

Théorème 2.6 *Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$ dense dans E . On suppose qu'il existe C tel que :*

$$a(u, u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(a), \quad (2.7)$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u, u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Alors A est un opérateur de domaine dense dans E et est autoadjoint.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2.5, il suffit de montrer que $A + \lambda I$ est inversible pour $\lambda > C$. Or ceci est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram appliqué à la forme bilinéaire $a(u, v) + \lambda(u, v)_E$ sur $D(a)$. □

2.6 Spectre d'un opérateur - Définitions

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur fermé de domaine dense. On a les définitions suivantes :

Définition 2.6 *On pose :*

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ est inversible (d'inverse borné)}\} \\ \sigma(A) &= \mathbb{C} \setminus \rho(A) \end{aligned}$$

On dit que $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant et $\sigma(A)$ le spectre de A . Pour $\lambda \in \rho(A)$, on pose $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. La famille des opérateurs $R(\lambda)$ est appelée la résolvante de A .

Lemme 2.9 *$\rho(A)$ est ouvert et $\sigma(A)$ est fermé. De plus, si λ et ξ appartiennent à $\rho(A)$, on a :*

$$R(\lambda) - R(\xi) = (\lambda - \xi)R(\lambda)R(\xi) \quad (2.8)$$

Cette identité est appelée l'identité résolvante.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \rho(A)$. Alors, on a :

$$A - \xi I = (A - \lambda I)(I + (\lambda - \xi)R(\lambda))$$

Par conséquent, $A - \xi I$ est inversible dès que $|\lambda - \xi| < \frac{1}{\|R(\lambda)\|}$. Soient λ et ξ appartenant à $\rho(A)$. Alors l'identité résolvante se déduit de l'égalité :

$$R(\xi) = (I + (\lambda - \xi)R(\lambda))^{-1}R(\lambda).$$

□

D'après le théorème 2.2, λ appartient à l'ensemble résolvant dès que $A - \lambda I$ est bijectif. En effet, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est alors automatiquement borné. Autrement dit :

$$\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \exists C > 0; \|u\|_E \leq C\|Au - \lambda u\|_E, \quad \forall u \in D(A). \quad (2.9)$$

La contraposée de cette implication s'écrit :

$$\text{Si } \exists u_n \in D(A) \text{ t.q. } \|u_n\|_E = 1 \text{ et } \|Au_n - \lambda u_n\|_E \longrightarrow 0 \text{ alors } \lambda \in \sigma(A). \quad (2.10)$$

Les implications réciproques de (2.9) et de (2.10) ne sont pas vraies en général. En revanche, elles le deviennent, nous le verrons, pour les opérateurs autoadjoints.

Si λ appartient au spectre de A , alors :

– Soit $A - \lambda I$ n'est pas injectif. Cela signifie que

$$\exists u \in D(A), u \neq 0 \quad Au = \lambda u.$$

On dit alors que λ est une *valeur propre* de A . On appelle *sous-espace propre* associé à λ l'espace $E(\lambda)$ donné par :

$$E(\lambda) = \{u \in D(A); Au = \lambda u\}.$$

La dimension de $E(\lambda)$ est appelée la *multiplicité* de λ . Enfin, l'ensemble des valeurs propres de A est noté $\sigma_p(A)$ et est appelé le *spectre ponctuel* de A .

– Soit $A - \lambda I$ est injectif mais non surjectif (ceci n'est possible que si $\dim E = +\infty$). On distingue dans ce cas le spectre continu $\sigma_c(A)$ et le spectre résiduel $\sigma_r(A)$. On dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ si $\text{Im}(A - \lambda I)$ est dense dans E et $\lambda \in \sigma_r(A)$ sinon.

Notons que λ est dans le spectre résiduel de A si et seulement si il existe $v \in E$, $v \neq 0$, tel que :

$$\forall u \in D(A) \quad ((A - \lambda I)u, v)_E = 0$$

ce qui équivaut à dire que $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) \neq 0$. En d'autres termes, on a :

$$\forall \lambda \notin \sigma_p(A) \quad \lambda \in \sigma_r(A) \iff \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*).$$

Exemple 2.13 : Considérons l'opérateur $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ donné par :

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}); xu(x) \in L^2(\mathbb{R})\} \text{ et } Au(x) = xu(x).$$

Cet opérateur n'a pas de valeur propre.

En effet, soient $u \in D(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $xu(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors u est identiquement nul.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs de λ l'opérateur $A - \lambda I$ est surjectif.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si $\lambda \notin \mathbb{R}$, l'équation $(x - \lambda)u(x) = f(x)$ admet une solution unique u donnée par $u(x) = \frac{f(x)}{x - \lambda}$.

En revanche, si $\lambda \in \mathbb{R}$, cette équation n'admet pas de solution pour tout f . En effet si par exemple f est continue en λ alors la fonction $\frac{f(x)}{x - \lambda}$ est équivalente au voisinage de λ à $\frac{f(\lambda)}{x - \lambda}$ et n'est donc pas de carré intégrable.

En conclusion, on a :

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \sigma(A) = \mathbb{R}, \quad \sigma_p(A) = \emptyset.$$

On vérifie aisément que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $Im(A - \lambda I)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, le spectre de A est purement continu : $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$.

Plus généralement, si $q(x)$ est une fonction continue, on vérifie que l'opérateur de multiplication A de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); qu \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

défini par $Au = qu$ a pour spectre :

$$\sigma(A) = \{q(x); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dans le cas des opérateurs bornés, on a le

Lemme 2.10 *Soit A un opérateur borné de E . Alors :*

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|A\|\}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors $A - \lambda I$ est inversible et :

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n$$

(car la série est normalement convergente).

□

Exemple 2.14 : Considérons dans $E = \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur borné A défini par :

$$\forall u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad \begin{cases} (Au)_n = u_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ (Au)_0 = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, soit B l'opérateur borné de $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par :

$$\forall u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad (Bu)_n = u_{n+1}.$$

Alors, comme :

$$(Au, v)_E = \sum_{n \geq 1} u_{n-1} v_n = \sum_{n \geq 0} u_n v_{n+1} = (u, Bv)_E$$

B est l'adjoint de A .

D'après le lemme précédent, comme $\|A\| = \|B\| = 1$, $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont inclus dans le disque unité de \mathbb{C} .

On vérifie facilement par récurrence sur n que A n'admet pas de valeur propre.

En revanche le spectre ponctuel de B est :

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}.$$

En effet, le vecteur $u = (u_n)$ avec $u_n = \lambda^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Il en résulte que :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}.$$

De plus, les spectres étant fermés, on a :

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}.$$

Les spectres de A et de B coïncident mais leurs structures sont très différentes puisque :

$$\begin{cases} \sigma_r(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}. \end{cases}$$

Remarque 2.6 Soit U un opérateur unitaire de E dans F . Autrement dit, on a :

$$UU^* = I_F \quad \text{et} \quad U^*U = I_E.$$

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné de E . Alors, on peut définir l'opérateur $\hat{A} : D(\hat{A}) \subset F \rightarrow F$ de la façon suivante :

$$D(\hat{A}) = U(D(A)) \quad \text{et} \quad \hat{A}u = UAU^*u.$$

On dit que A et \hat{A} sont unitairement équivalents. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\hat{A} - \lambda I_F = UAU^* - \lambda I_F = U(A - \lambda I_E)U^*.$$

On en déduit que $\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$. Mieux encore, on a : $\sigma_p(A) = \sigma_p(\hat{A})$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(\hat{A})$ et $\sigma_r(A) = \sigma_r(\hat{A})$.

Nous utiliserons souvent cette remarque lorsque $E = F = L^2(\mathbb{R}^n)$ et U est la transformée de Fourier.

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints

Dans ce chapitre, nous allons donner une description précise du spectre dans le cas d'un opérateur autoadjoint. En particulier, nous introduisons les notions de spectre essentiel et spectre discret. Enfin, nous démontrons le Principe du Min-Max qui permet d'étudier les valeurs propres situées en dessous du spectre essentiel.

3.1 Caractérisation du spectre

En ce qui concerne les valeurs propres, les résultats bien connus dans le cas des matrices se généralisent aisément. Ainsi, soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Supposons que $u \in D(A)$, $u \neq 0$ et $Au = \lambda u$. Autrement dit, λ est une valeur propre de A et u un vecteur propre associé. Alors :

$$(Au, u)_E = \lambda \|u\|_E^2 \quad \text{et} \quad (Au, u)_E = (u, Au)_E = \overline{(Au, u)_E}$$

Il en résulte que nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous allons voir que non seulement les valeurs propres mais tout le spectre de A est réel.

Si de plus, on a $v \in D(A)$, $v \neq 0$ et $Av = \mu v$ avec $\lambda \neq \mu$, alors :

$$(Au, v)_E = \lambda(u, v)_E = (u, Av)_E = \mu(u, v)_E$$

d'où $(u, v)_E = (Au, v)_E = 0$. Autrement dit, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux.

De nombreux résultats reposent sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur fermé et soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\|u\|_E \leq C \|Au - \lambda u\|_E \quad \forall u \in D(A). \quad (3.1)$$

Alors :

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \quad (3.2)$$

et

$$\text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermé.} \quad (3.3)$$

Si de plus, A est autoadjoint, alors :

$$\text{Im}(A - \bar{\lambda}I) \text{ est dense dans } E. \quad (3.4)$$

DÉMONSTRATION. (3.2) est une conséquence triviale de (3.1) et (3.4) est une conséquence de (3.2) et du lemme 2.6. Démontrons enfin (3.3). Soit v_n une suite de $\text{Im}(A - \lambda I)$ telle que $v_n \rightarrow v$ dans E . Comme $v_n \in \text{Im}(A - \lambda I)$, il existe $u_n \in D(A)$ tel que $Au_n - \lambda u_n = v_n$. D'après (3.1), u_n est une suite de Cauchy dans E et converge donc dans E vers un élément u . Mais comme A est fermé, on a finalement $u \in D(A)$ et $Au - \lambda u = v$. □

On déduit de ce lemme le

Théorème 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \notin \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall u \in D(A) \quad |(Au - \lambda u, u)_E|^2 = |(Au, u)_E - \text{Re } \lambda \|u\|_E|^2 + (\text{Im } \lambda)^2 \|u\|_E^4,$$

d'où :

$$\forall u \in D(A) \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \|Au - \lambda u\|_E.$$

De même, on a :

$$\forall u \in D(A) \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \|Au - \bar{\lambda}u\|_E.$$

On déduit alors aisément du lemme 3.1 que $A - \lambda I$ est injectif et surjectif, car son image est dense et fermée. □

Corollaire 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma(A)$. Alors λ est réel d'après le théorème précédent. Par conséquent :

$$\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = (\text{Ker}(A - \lambda I))^\perp.$$

Autrement dit, si λ n'est pas une valeur propre, alors l'image de $A - \lambda I$ est nécessairement dense dans E . □

On déduit du lemme 3.1 et du théorème 3.1 le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors le spectre de A admet la caractérisation suivante :*

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \text{Il existe une suite } u_n \in D(A) \text{ telle que } \|u_n\|_E = 1 \text{ et } \|Au_n - \lambda u_n\|_E \rightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. S'il existe une telle suite, alors on ne peut pas avoir une inégalité du type (3.1) et donc nécessairement $\lambda \in \sigma(A)$. Réciproquement, si $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et si l'inégalité (3.1) était vérifiée, le lemme 3.1 fournirait une contradiction. \square

Corollaire 3.2 Notons $\Theta(A)$ l'image numérique de A définie par :

$$\Theta(A) = \{(Au, u)_E; u \in D(A), \|u\|_E = 1\}.$$

Alors : $\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et u_n une suite associée. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Au_n, u_n)_E = \lambda$$

donc $\lambda \in \overline{\Theta(A)}$. \square

On dit qu'un opérateur non borné $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est
– borné inférieurement s'il existe une constante C telle que :

$$\forall u \in D(A) \quad (Au, u)_E \geq C\|u\|_E^2.$$

On a alors :

$$\sigma(A) \subset \bar{\Theta}(A) \subset [C, +\infty[.$$

– borné supérieurement si $-A$ est borné inférieurement.

Il nous reste à établir quelques liens entre $\Theta(A)$ et $\sigma(A)$. Pour cela, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant, qui exprime le fait que la norme d'un opérateur autoadjoint borné est égale à son rayon spectral :

Lemme 3.2 Soit $A : E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et borné. Alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et

$$\|A\| = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons

$$R = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

L'inégalité $R \leq \|A\|$ résulte du corollaire 3.2. En effet, il est clair que :

$$\Theta(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Réciproquement, d'après le théorème 2.4, il existe une suite $u_n \in E$ telle que $\|u_n\|_E = 1$ et $|(Au_n, u_n)_E| \rightarrow \|A\|$. Supposons par exemple que $(Au_n, u_n)_E \rightarrow \|A\|$. On a :

$$\|Au_n - \|A\|u_n\|_E^2 = \|Au_n\|_E^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|(Au_n, u_n)_E.$$

Par conséquent :

$$\|Au_n - \|A\|u_n\|_E^2 \leq 2\|A\| (\|A\| - (Au_n, u_n)_E),$$

ce qui prouve que $\|Au_n - \|A\|u_n\|_E$ tend vers 0. D'après le théorème 3.2, $\|A\|$ appartient donc au spectre de A . De même si $(Au_n, u_n)_E \rightarrow -\|A\|$, on montre que $-\|A\| \in \sigma(A)$. \square

Démontrons tout d'abord le

Lemme 3.3 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné. Alors, si $\lambda \in \rho(A)$:*

$$\xi \in \sigma((A - \lambda I)^{-1}) \iff \lambda + \frac{1}{\xi} \in \sigma(A).$$

DÉMONSTRATION. En effet, on vérifie aisément que :

$$(A - \lambda I)^{-1} - \xi I = -\xi(A - \lambda I)^{-1}(A - (\frac{1}{\xi} + \lambda)I).$$

\square

Corollaire 3.3 *Le spectre d'un opérateur autoadjoint est non vide.*

DÉMONSTRATION. Si $\sigma(A) \neq \mathbb{R}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est autoadjoint borné donc son spectre est non vide. Le résultat s'en déduit d'après le lemme 3.3. \square

On utilisera également dans la suite le

Corollaire 3.4 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et soit $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

DÉMONSTRATION. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est borné et autoadjoint. D'après le lemme 3.2, on a donc :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \sup\{|\xi|; \xi \in \sigma((A - \lambda I)^{-1})\}.$$

Le résultat s'en déduit d'après le lemme 3.3. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le :

Lemme 3.4 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors :*

$$\begin{aligned} \inf \sigma(A) &= \inf \Theta(A) = \inf_{u \in E, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \\ \sup \sigma(A) &= \sup \Theta(A) = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3.2, il est clair que :

$$\begin{aligned}\inf \sigma(A) &\geq \inf \Theta(A) \\ \sup \sigma(A) &\leq \sup \Theta(A)\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = \inf \sigma(A) > -\infty$. Alors, pour tout $\beta > 0$, $(\alpha - \beta) \in \rho(A)$ et d'après le corollaire 3.4 :

$$\|(A - (\alpha - \beta)I)^{-1}\| = \frac{1}{\beta}.$$

Par conséquent, pour tout $u \in D(A)$:

$$\|u\|_E \leq \frac{1}{\beta} \|Au - (\alpha - \beta)u\|_E$$

d'où :

$$\beta^2 \|u\|_E^2 \leq \|Au\|_E^2 - 2(\alpha - \beta)(Au, u)_E + (\alpha - \beta)^2 \|u\|_E^2.$$

En faisant tendre β vers $+\infty$, on voit que nécessairement :

$$(Au, u)_E \geq \alpha \|u\|_E^2 \quad \forall u \in D(A)$$

d'où la première égalité; on démontre de même la seconde. □

3.2 Spectre essentiel et spectre discret

Nous allons maintenant introduire une notion nouvelle, celle de *spectre essentiel*. Nous n'en donnons pas la définition la plus générale car nous ne considérerons dans la suite que le spectre essentiel d'opérateurs autoadjoints.

Définition 3.1 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. On appelle *spectre essentiel* de A et on note $\sigma_{ess}(A)$ le sous-ensemble du spectre défini ainsi : $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que $\|u_n\|_E = 1$, $\|Au_n - \lambda u_n\|_E \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow 0$ dans E faiblement.

La suite u_n est appelée une suite singulière.

Nous allons à l'aide de cette définition décrire plus précisément ce qui caractérise les valeurs du spectre qui appartiennent au spectre essentiel et celles qui ne lui appartiennent pas.

Lemme 3.5 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$, alors λ est une valeur propre de A .

38 CHAPITRE 3. THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

DÉMONSTRATION. D'après les théorèmes 3.1 et 3.2, $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|Au_n - \lambda u_n\|_E \rightarrow 0.$$

On peut donc extraire de u_n une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans E . Si $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$, on a nécessairement : $u \neq 0$. De plus, on a

$$\forall v \in D(A) \quad (Au_n - \lambda u_n, v)_E = (u_n, Av - \lambda v)_E.$$

D'où, par passage à la limite :

$$\forall v \in D(A) \quad 0 = (u, Av - \lambda v)_E,$$

ce qui prouve que $u \in D(A)$ et par suite

$$(Au - \lambda u, v)_E = 0.$$

On en déduit que u est un vecteur propre associé à λ . □

Lemme 3.6 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Si λ est une valeur propre de A de multiplicité infinie, alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.*

DÉMONSTRATION. Soit (u_n) une base orthonormale du sous-espace propre $E(\lambda)$. On a donc : $Au_n - \lambda u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $(u_n, u_m)_E = \delta_{mn}$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Il est clair que la suite u_n converge faiblement vers 0 dans E . Le résultat s'en déduit. □

Lemme 3.7 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Soit $\lambda_n \in \sigma(A)$ une suite de points du spectre tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$ et $\lambda_n \neq \lambda$ pour tout n . Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout n , d'après le théorème 3.2, il existe $u_n \in D(A)$ tel que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|Au_n - \lambda_n u_n\|_E \leq \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}.$$

On peut extraire de la suite u_n une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans E . Pour conclure, il suffit de montrer que $u = 0$. Or on a :

$$\forall v \in D(A) \quad \lambda_n (u_n, v)_E = (\lambda_n u_n - Au_n, v)_E + (u_n, Av)_E.$$

Donc, par passage à la limite, on obtient :

$$\forall v \in D(A) \quad \lambda (u, v)_E = (u, Av)_E.$$

D'où $u \in D(A)$ et $Au = \lambda u$. Par conséquent :

$$(\lambda - \lambda_n)(u, u_n)_E = (Au - \lambda_n u, u_n)_E = (u, Au_n - \lambda_n u_n)_E.$$

D'où :

$$|(u_n, u)_E| \leq \frac{\|u\|_E}{n}.$$

On en déduit enfin :

$$\|u\|_E^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, u)_E = 0,$$

d'où le résultat. □

On déduit du lemme précédent le

Corollaire 3.5 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint. Alors le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$ est fermé.*

En résumé :

$$\lambda \in \sigma(A) \text{ et } \lambda \notin \sigma_{ess}(A) \Rightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de multiplicité finie et isolée dans le spectre}$$

La réciproque est vraie mais nous ne la démontrerons pas ici.

On appelle *spectre discret* de A et on note $\sigma_{disc}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A de multiplicité finie et isolées dans le spectre. D'après ce qui précède, on a :

$$\sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A) = \sigma(A) \quad \text{et} \quad \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{disc}(A) = \emptyset.$$

Exemple 3.1 : Soit A l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R})$ donné par :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}) \quad , \quad Au = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \forall u \in D(A).$$

Nous allons suivre deux démarches distinctes pour déterminer son spectre.

Méthode n°1 :

Nous avons vu (cf. exemple 2.10) que A est autoadjoint. De plus :

$$\forall u \in D(A) \quad (Au, u)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx \geq 0.$$

D'après le corollaire 3.2, on a donc :

$$\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)} \subset \mathbb{R}^+.$$

Par ailleurs, il est clair que A n'admet pas de valeur propre, donc :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A).$$

Nous allons démontrer que :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}^+.$$

40 CHAPITRE 3. THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

Comme $\sigma_{ess}(A)$ est fermé, il suffit d'établir l'inclusion suivante :

$$\mathbb{R}^{+*} \subset \sigma_{ess}(A).$$

Soit $\lambda > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx = 1$. Posons :

$$\forall n \geq 1 \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) e^{i\sqrt{\lambda}x}.$$

Alors on vérifie aisément que ψ_n est une suite singulière associée à la valeur λ . En effet :

$$- \int_{\mathbb{R}} \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(y) dy = 1 \quad \forall n.$$

$$- \left| -\frac{d^2\psi_n}{dx^2}(x) - \lambda\psi_n(x) \right| \leq n^{-5/2} \left| \varphi''\left(\frac{x}{n}\right) \right| + 2n^{-3/2} \left| \varphi'\left(\frac{x}{n}\right) \right| \sqrt{\lambda} \quad \text{et par conséquent :}$$

$$\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|_E \rightarrow 0.$$

– Enfin, on vérifie aisément que $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\xi(x) dx \rightarrow 0$ pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent, ψ_n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

En fait, dans ce cas particulier, il n'est pas nécessaire de vérifier le troisième point.

Méthode n°2 :

Nous allons utiliser la transformée de Fourier. On rappelle que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx$$

appartient elle aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et que, d'après le théorème de Plancherel :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Autrement dit, la transformée de Fourier est un isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. On peut alors, en suivant la remarque 2.6, définir l'opérateur \hat{A} unitairement équivalent à A comme suit :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u}; u \in D(A)\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u} = \widehat{Au}.$$

On vérifie aisément que :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}); \xi^2\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u}(\xi) = \xi^2\hat{u}(\xi).$$

Autrement dit, \hat{A} est un opérateur de multiplication. Il est alors très facile de vérifier, tout comme dans l'exemple 2.13, que \hat{A} n'a pas de valeur propre et que $\sigma(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}) = \mathbb{R}^+$. Or le spectre de A coïncide avec celui de \hat{A} . On a donc terminé.

Exemple 3.2 :

On peut étudier par des techniques tout à fait analogues l'opérateur $-\Delta$ dans \mathbb{R}^n . Plus précisément, considérons l'opérateur autoadjoint A défini dans l'exemple 2.10. Nous allons étudier son spectre par transformée de Fourier. Le lecteur pourra, à titre d'exercice, faire une étude directe à l'aide de suites singulières.

Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de u est donnée par :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i(x|\xi)} dx \quad \text{où} \quad (x|\xi) = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$$

et d'après le théorème de Plancherel :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On définit alors l'opérateur \hat{A} unitairement équivalent à A comme ci-dessus, de sorte que :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n); |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi).$$

où $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Étudions le spectre de \hat{A} . Il est clair qu'il n'existe pas de fonction \hat{u} non nulle dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\lambda - |\xi|^2) \hat{u}(\xi) = 0$ pour tout ξ . Par conséquent, \hat{A} n'a pas de valeur propre. De même, il est clair que l'équation $(\lambda - |\xi|^2) \hat{u}(\xi) = \hat{f}$ n'admet une solution \hat{u} pour tout \hat{f} que si $\lambda \notin \mathbb{R}^+$. En conclusion, et tout comme dans le cas $n = 1$, on a :

$$\sigma(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}) = \mathbb{R}^+ = \sigma(A) = \sigma_{ess}(A).$$

3.3 Perturbation compacte

Il n'est pas toujours facile de déterminer directement le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint A . Souvent, on essaie de montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + K$ où B est un opérateur autoadjoint dont on sait calculer le spectre essentiel par des techniques simples et K est un opérateur symétrique admettant certaines propriétés de compacité. On dit que A et B diffèrent d'une perturbation compacte. Généralement, on sait alors montrer que :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Théorème 3.3 Soit $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et $K : E \rightarrow E$ un opérateur compact autoadjoint. Alors l'opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) \quad Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est autoadjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

42 CHAPITRE 3. THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

DÉMONSTRATION. 1 - Montrons tout d'abord que A est autoadjoint. Soit $v \in D(A^*)$. cela signifie que :

$$\exists w \in E / \forall u \in D(A) \quad (Au, v)_E = (u, w)_E.$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\forall u \in D(A) \quad (Bu + Ku, v)_E = (u, w)_E$$

ou encore :

$$\forall u \in D(B) \quad (Bu, v)_E = (u, w - Kv)_E.$$

Il résulte de cette dernière égalité que $v \in D(B)$ et que $Bv = w - Kv$. Autrement dit, $v \in D(A)$ et $A^*v = Av = w$.

2 - Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$. Il existe donc une suite singulière u_n :

$$\begin{cases} u_n \in D(B) & \|u_n\|_E = 1 \\ u_n \rightarrow 0 & \text{dans } E \\ Bu_n - \lambda u_n \rightarrow 0 & \text{dans } E \end{cases}$$

Comme K est compact, il existe une sous-suite encore notée u_n telle que $Ku_n \rightarrow v$ dans E . Mais comme u_n tend faiblement vers 0, on a pour tout $w \in E$, $(Ku_n, w)_E = (u_n, Kw)_E \rightarrow 0$ d'où $v = 0$. Il en résulte que $Au_n - \lambda u_n \rightarrow 0$, donc u_n est également une suite singulière pour A et $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. On a ainsi montré que $\sigma_{ess}(B) \subset \sigma_{ess}(A)$. On montre de même l'inclusion réciproque. □

Définition 3.2 Soit $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et $K : D(K) \subset E \rightarrow E$ un opérateur tel que : $D(B) \subset D(K)$. On dit que K est B -compact si l'on a la propriété suivante : Si u_n est une suite de $D(B)$ telle que $(\|u_n\|_E + \|Bu_n\|_E)$ reste borné, alors la suite Ku_n admet une sous-suite convergente.

Dans la suite, nous aurons recours au

Théorème 3.4 Soit $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement i.e. :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } (Bu, u)_E + \gamma \|u\|_E^2 \geq 0 \quad \forall u \in D(B).$$

Soit $K : D(K) \subset E \rightarrow E$ un opérateur symétrique tel que K soit B -compact Alors l'opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) \quad Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est autoadjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du

Lemme 3.8 Soit $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint et $K : D(K) \subset E \rightarrow E$ un opérateur B -compact. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall u \in D(B) \quad \|Ku\|_E \leq C_\varepsilon \|u\|_E + \varepsilon \|Bu\|_E.$$

DÉMONSTRATION. Soit ε fixé. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $u_n \in D(K)$ telle que

$$\|Ku_n\|_E = 1 \text{ et } n \|u_n\|_E + \|Bu_n\|_E \leq 1.$$

Il en résulte que u_n tend vers 0 dans E . De plus, comme $\|Bu_n\|_E$ est borné, la suite Ku_n admet une sous-suite convergente que nous noterons encore $Ku_n : Ku_n \rightarrow v$ dans E . Mais pour tout $w \in D(K)$:

$$(Ku_n, w)_E = (u_n, Kw)_E \rightarrow 0$$

donc $v = 0$.

Par ailleurs $\|v\|_E = \lim \|Ku_n\|_E = 1$, d'où la contradiction. □

Démontrons maintenant le théorème 3.4.

DÉMONSTRATION.

1 - Montrons tout d'abord que A est autoadjoint. Soit $\lambda > \gamma$. Alors, par hypothèse, $B + \lambda I$ est inversible. On a donc :

$$A + \lambda I = (B + \lambda I) + K = (I + K(B + \lambda I)^{-1}) (B + \lambda I).$$

Nous allons montrer que $A + \lambda I$ est inversible pour λ assez grand. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour λ assez grand, $K(B + \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné de norme strictement inférieure à 1. Or on a, d'après le lemme 3.8 :

$$\|K(B + \lambda I)^{-1}u\|_E \leq C_\varepsilon \|(B + \lambda I)^{-1}u\|_E + \varepsilon \|B(B + \lambda I)^{-1}u\|_E \quad \forall u \in E,$$

et, d'après le corollaire 3.4 :

$$\begin{aligned} \|(B + \lambda I)^{-1}u\|_E &\leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \|u\|_E \\ \|B(B + \lambda I)^{-1}u\|_E &\leq \frac{2\lambda - \gamma}{\lambda - \gamma} \|u\|_E \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon < \frac{1}{2}$ puis λ assez grand, on obtient le résultat cherché. On conclut en appliquant le théorème 2.5.

2 - Pour montrer que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$, on suit exactement la même démarche qu'au théorème précédent. □

Exemple 3.3 : Soit B l'opérateur défini par :

$$\begin{cases} D(B) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ Bu = -\Delta u \end{cases}$$

et K l'opérateur suivant :

$$Ku(x) = V(x)u(x)$$

où V est une fonction à valeurs réelles et à support compact Ω dans \mathbb{R}^n telle que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on sait que B est autoadjoint et borné inférieurement. De plus, il est clair, grâce à

l'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, que K est B -compact. Il en résulte que l'opérateur A suivant :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Au = -\Delta u + Vu$$

est autoadjoint et que :

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \mathbb{R}^+.$$

3.4 Le Principe du Min-Max

Le principe de Min-Max s'applique aux opérateurs autoadjoints bornés inférieurement ; il permet de caractériser par diverses formules dites "de Min-Max" les valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel. On trouve dans la littérature plusieurs énoncés de ce Principe. Nous en donnons ici deux énoncés, comportant en particulier les différentes formules de Min-Max qui nous seront utiles pendant ce cours.

Soit A un opérateur autoadjoint non borné de E et $D(A)$ son domaine. On suppose que A est borné inférieurement i.e.

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad (Au, u)_E + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(A).$$

On rappelle que, d'après les résultats de la section précédente, tout point du spectre de A qui n'appartient pas au spectre essentiel est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

On définit le quotient de Rayleigh suivant :

$$\mathcal{R}_A(u) = \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \quad \forall u \in D(A), u \neq 0$$

On pose alors, pour tout entier $m, m \geq 1$:

$$\mu_m(A) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \quad (3.5)$$

où $\mathcal{V}_m(X)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de X de dimension m .

On pose également pour tout entier $m > 1$:

$$\tilde{\mu}_m(A) = \sup_{v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)} \in E} \inf_{u \in [v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}]_{D(A)}^\perp, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \quad (3.6)$$

où on note :

$$[v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}]_{D(A)}^\perp = \{u \in D(A); (u, v^{(i)})_E = 0, i = 1, m-1\}$$

On démontre alors les résultats suivants :

Théorème 3.5

1) L'égalité suivante est satisfaite :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) \quad \text{pour tout } m > 1.$$

2) Principe du Min-Max.

Notons $\lambda_e(A)$ la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur A (on pose $\lambda_e(A) = +\infty$ si $\sigma_{\text{ess}}(A) = \emptyset$) et $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres de A strictement inférieures à $\lambda_e(A)$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Alors :

- $\mu_m(A) < \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) \geq m$. Dans ce cas, $\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_m(A)$ sont exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur A .
- $\mu_m(A) = \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(A) = \lambda_e(A)$ pour tout entier $n \geq m$.

Pour établir ce théorème, nous allons démontrer deux lemmes préliminaires :

Lemme 3.9 Les suites $\mu_m(A)$ et $\tilde{\mu}_m(A)$ sont croissantes. De plus, on a :

$$\tilde{\mu}_m(A) \leq \mu_m(A) \quad \forall m > 1. \quad (3.7)$$

DÉMONSTRATION.

Pour établir (3.7), considérons un sous-espace V_m de $D(A)$ de dimension m et $(m-1)$ éléments de E notés $v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}$. Alors il existe un élément \tilde{v} de V_m orthogonal à tous les $v^{(i)}$. Par conséquent :

$$\sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \geq \inf_{u \in [v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}]_{D(A)}^\perp, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u).$$

Ceci étant vrai pour tout V_m et pour tous $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$, l'inégalité (3.7) s'en déduit. \square

Lemme 3.10 On a :

$$\mu_m(A) \leq \lambda_e(A) \quad \forall m \geq 1. \quad (3.8)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas où $\lambda_e(A) < +\infty$.

Pour établir (3.8), on remarque que $\lambda_e(A)$ appartient au spectre essentiel de A . Par conséquent, il existe une suite singulière $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} u_p \in D(A) \text{ et } \|u_p\|_E = 1, \text{ pour tout } p; \\ u_p \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } E; \\ Au_p - \lambda_e(A)u_p \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } E. \end{array} \right.$$

Le sous-espace de E engendré par cette suite est de dimension infinie. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait une sous-suite convergeant fortement dans E vers 0. Or ceci est impossible car $\|u_p\|_E = 1$, pour tout p . On peut donc trouver, pour tout ε strictement positif, m entiers p_1, p_2, \dots, p_m pour lesquels :

1. l'espace V_m engendré par u_{p_1}, \dots, u_{p_m} est de dimension m

2. $\|Au_{p_i} - \lambda_e(A)u_{p_i}\|_E \leq \varepsilon$, pour $i = 1, m$

3. $|(u_{p_i}, u_{p_j})_E| \leq \varepsilon$, pour $i \neq j$.

Soit $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{p_i}$ un élément de V_m . On vérifie que :

$$\left| \begin{array}{l} \|u\|_E^2 \geq (1 - 2m\varepsilon) \sum_{i=1}^m \alpha_i^2; \\ (Au, u)_E \leq (\lambda_e(A) + \varepsilon(1 + 2m + 2m\lambda_e(A))) \sum_{i=1}^m \alpha_i^2. \end{array} \right.$$

Par conséquent, il existe une constante $K_m(A)$ indépendante de ε telle que, pour tout u élément de V_m :

$$\mathcal{R}_A(u) \leq \lambda_e(A) + K_m(A)\varepsilon.$$

La majoration (3.8) s'en déduit. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.5 :

DÉMONSTRATION.

▷ Le cas $m = 1$.

- Nous démontrons tout d'abord le principe du Min-Max appliqué à $\mu_1(A)$. On a (cf. lemme 3.4) :

$$\mu_1 = \inf \sigma(A).$$

D'après (3.8), deux cas peuvent se présenter :

$$\left| \begin{array}{l} i) \mu_1(A) = \lambda_e(A) \\ ii) \mu_1(A) < \lambda_e(A). \end{array} \right.$$

Dans le cas (i), il est clair qu'il n'existe aucune valeur propre de A strictement inférieure à $\lambda_e(A)$. Dans le second cas, $\mu_1(A)$ n'appartient pas à $\sigma_{ess}(A)$. C'est donc une valeur propre de l'opérateur A .

▷ Le Principe du Min-Max dans le cas $m > 1$.

- Supposons que $\mathcal{N}(A)$ est supérieur ou égal à m . Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ les m premières valeurs propres de A :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m < \lambda_e(A),$$

et e_1, e_2, \dots, e_m des vecteurs propres associés tels que :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, m.$$

En choisissant $V_m = [e_1, \dots, e_m]$, on établit :

$$\mu_m(A) \leq \lambda_m. \tag{3.9}$$

Par ailleurs, posons $F = [e_1, \dots, e_{m-1}]^\perp$ et soit A_F la restriction de l'opérateur A à l'espace F :

$$A_F : D(A_F) = D(A) \cap F \rightarrow F.$$

On vérifie que A_F est autoadjoint. Par conséquent, d'après le lemme 3.4, on a :

$$\inf_{u \in F \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_F) = \lambda_m,$$

où $\sigma(A_F)$ désigne le spectre de l'opérateur A_F . On a par conséquent :

$$\tilde{\mu}_m(A) = \lambda_m. \quad (3.10)$$

De (3.7), (3.9) et (3.10), on déduit finalement :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) = \lambda_m. \quad (3.11)$$

• Supposons maintenant que $\mathcal{N}(A)$ est inférieur ou égal à $m - 1$. Si $\mathcal{N}(A)$ est nul, on a d'après ce qui précède :

$$\mu_1(A) = \tilde{\mu}_1(A) = \lambda_e(A),$$

d'où

$$\mu_p(A) = \tilde{\mu}_p(A) = \lambda_e(A), \quad \forall p > 1,$$

d'après les lemmes 3.9 et 3.10.

Supposons donc que $\mathcal{N}(A)$ est non nul et posons : $G = [e_1, \dots, e_n]^\perp$, où $n = \mathcal{N}(A)$. On a cette fois :

$$\inf_{u \in G \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_G) = \lambda_e(A),$$

où A_G désigne la restriction de A à G . Il en résulte que :

$$\tilde{\mu}_{n+1}(A) \geq \lambda_e(A). \quad (3.12)$$

De (3.7), (3.8) et (3.12), on déduit dans ce cas :

$$\tilde{\mu}_p(A) = \mu_p(A) = \lambda_e(A), \quad \text{pour tout } p > n. \quad (3.13)$$

□

Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$, dense dans E . On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$a(u, u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(a),$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u, u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Soit A l'opérateur non borné de E associé à la forme a (cf. section 2.5) et $D(A)$ son domaine. Il existe dans ce cas une version du Principe du Min-Max qui n'utilise que l'expression de la forme a . En effet, posons :

$$\mathcal{R}_a(u) = \frac{a(u, u)}{\|u\|_E^2} \quad \forall u \in D(a), u \neq 0$$

et

$$\mu_m(a) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(a))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_a(u) \quad (3.14)$$

$$\tilde{\mu}_m(a) = \sup_{v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)} \in E} \inf_{u \in [v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}]_{D(a)}^\perp, u \neq 0} \mathcal{R}_a(u) \quad (3.15)$$

Alors on a le :

Théorème 3.6 *Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} \mu_1(a) = \mu_1(A) \\ \mu_m(a) = \tilde{\mu}_m(a) = \mu_m(A) \quad \forall m > 1, \end{cases} \quad (3.16)$$

où $\mu_m(A)$ est défini par l'une des deux formules (3.5) ou (3.6).

Nous allons établir un lemme préliminaire qui sera l'outil essentiel de la démonstration :

Lemme 3.11 *$D(A)$ est dense dans $D(a)$ pour la norme $\|\cdot\|_{D(a)}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in D(a)$ tel que $a(u, v) + C(u, v)_E = 0$ pour tout $v \in D(A)$. il suffit de montrer que $u = 0$. Or on peut réécrire ce qui précède sous la forme :

$$(u, Av + Cv)_E = 0 \quad \forall v \in D(A).$$

Comme l'opérateur $A + CI$ est inversible, la nullité de u s'en déduit. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.6 :

DÉMONSTRATION. Comme $D(A)$ est inclus dans $D(a)$, on a directement :

$$\mu_m(a) \leq \mu_m(A), \quad \forall m \geq 1. \quad (3.17)$$

Par ailleurs, on établit aisément l'analogie de (3.7) :

$$\tilde{\mu}_m(a) \leq \mu_m(a) \quad \forall m > 1. \quad (3.18)$$

▷ le cas $m = 1$ Soit $u \in D(a)$. Il existe alors une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que :

$$\begin{aligned} \|u_p - u\|_{D(a)} &\longrightarrow 0, \\ p &\longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} (Au_p, u_p) \longrightarrow a(u, u) \\ \|u_p\|_E \longrightarrow \|u\|_E. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{R}_a(u) \geq \liminf \mathcal{R}_A(u_p) \geq \mu_1(A).$$

Ceci étant vrai pour tout u dans $D(a)$, on obtient finalement :

$$\mu_1(a) \geq \mu_1(A).$$

La première égalité dans (3.16) résulte de cette inégalité et de l'inégalité inverse (3.17).

▷ Le cas $m > 1$

Supposons que $\mathcal{N}(A)$ est supérieur ou égal à m et reprenons les notations introduites au cours de la démonstration précédente. On a :

$$\mu_m(A) = \inf_{u \in F \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u).$$

Soit $u \in F \cap D(a)$. Il existe une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que $\|u_p - u\|_{D(a)} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$. On pose alors :

$$\tilde{u}_p = u_p - \sum_{i=1}^{m-1} (u_p, e_i) e_i,$$

et on vérifie aisément que :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{u}_p \in D(A) \cap F \quad \forall p \in \mathbb{N}; \\ \|\tilde{u}_p\|_E \rightarrow \|u\|_E \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty; \\ (A\tilde{u}_p, \tilde{u}_p) \rightarrow a(u, u) \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Il en résulte que :

$$\inf_{u \in F \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \leq \inf_{u \in F \cap D(a), u \neq 0} \mathcal{R}_a(u),$$

et donc :

$$\mu_m(A) \leq \tilde{\mu}_m(a). \quad (3.19)$$

La seconde identité de (3.16) se déduit dans ce cas de (3.17), (3.18) et (3.19).

Supposons maintenant que $\mathcal{N}(A)$ est strictement inférieur à m . Avec les notations de la démonstration précédente, on a :

$$\mu_{n+1}(A) = \inf_{u \in G \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \lambda_e(A), \quad (3.20)$$

où $n = \mathcal{N}(A)$. On démontre alors comme plus haut que :

$$\mu_{n+1}(A) \leq \tilde{\mu}_{n+1}(a).$$

Il en résulte finalement que :

$$\mu_p(a) = \tilde{\mu}_p(a) = \lambda_e(A)$$

pour tout $p \geq n$, et en particulier pour $p = m$.

□

3.5 Opérateurs autoadjoints compacts

Nous considérons dans cette section le cas particulier des opérateurs autoadjoints et compacts de E dans E . Nous allons montrer que pour de tels opérateurs, les vecteurs propres forment une base de E . Il s'agit donc d'un résultat de diagonalisation. Il généralise à la dimension infinie le résultat qui exprime que toute matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée.

Pour cela, nous allons tout d'abord établir diverses propriétés sur le spectre d'un opérateur autoadjoint compact à l'aide du principe de Min-Max.

Dans toute la suite, E désigne un espace de Hilbert de dimension infinie.

Lemme 3.12 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors $0 \in \sigma(A)$.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $0 \notin \sigma(A)$, alors A^{-1} est un opérateur borné de E . Mais alors l'identité de E , Id_E , est un opérateur compact car :

$$Id_E = A^{-1} \circ A,$$

et ceci est impossible car la boule unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie n'est pas compacte. □

Lemme 3.13 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint. Alors $\sigma_{ess}(A) = \{0\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Alors il existe une suite singulière (u_n) de E telle que :

$$\|u_n\|_E = 1, \quad \|Au_n - \lambda u_n\|_E \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } E.$$

La suite u_n étant bornée et l'opérateur A compact, il existe une sous-suite que nous noterons encore u_n telle que Au_n converge vers v dans E fortement. Mais alors on en déduit que :

$$\lambda u_n \rightarrow v \quad \text{dans } E.$$

Comme u_n tend faiblement vers 0, ceci entraîne que $v = 0$, d'où finalement :

$$|\lambda| = \|\lambda u_n\|_E = \|v\|_E = 0.$$

Nous avons donc montré que le spectre essentiel de A est soit vide soit réduit à $\{0\}$. Montrons qu'il ne peut pas être vide. Si tel était le cas, 0 serait soit dans l'ensemble résolvant, soit une valeur propre de multiplicité finie. Dans les deux cas la restriction de A à $(\text{Ker } A)^\perp$ serait un opérateur compact inversible, ce qui est impossible d'après le lemme 3.12. □

On déduit directement de ce lemme les propriétés suivantes :

Corollaire 3.6 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint. Alors :*

- Toute valeur propre non nulle de A est de multiplicité finie.
- Le seul point d'accumulation possible des valeurs propres est 0.

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous considérons des opérateurs positifs i.e. tels que :

$$(Au, u)_E \geq 0 \quad \forall u \in E.$$

Cette hypothèse ne restreint pas la généralité de notre propos, tous les résultats s'étendant aisément au cas quelconque. Soit donc $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur positif. L'opérateur $-A$ est donc borné inférieurement par $-\|A\|$. D'après le lemme 3.13, la borne inférieure du spectre essentiel de $-A$ est égale à zéro :

$$\lambda_e(-A) = 0.$$

En appliquant le principe du min-max à $-A$, on obtient les résultats ci-dessous portant sur l'opérateur A . Pour $m = 1, 2, \dots, 3$, on pose :

$$\lambda_m(A) = \sup_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \inf_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \quad (3.21)$$

La suite $(\lambda_m(A))_{m \geq 1}$ est décroissante, positive ou nulle, et tend vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$.

D'après le théorème 3.5, on a :

Théorème 3.7 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif. De deux choses l'une :*
 – *Soit A est de rang fini. Alors, si M désigne le rang de A , $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_m(A), \dots, \lambda_M(A)$ sont les M valeurs propres strictement positives de A , ordonnées de la plus grande à la plus petite et répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité. De plus :*

$$\lambda_m(A) = 0 \quad \forall m > M.$$

– *Soit A n'est pas de rang fini. Alors A admet une infinité dénombrable de valeurs propres strictement positives et de multiplicité finie qui peuvent être ordonnées en suite décroissante convergant vers 0. De plus, si chaque valeur propre est répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, cette suite coïncide avec la suite $(\lambda_m(A))$.*

Notons que, pour tout $m \leq M$ si A est de rang M finiet pour tout $m \geq 1$ sinon, les sup et inf dans les formules 3.21 sont atteints et l'on peut donc écrire

$$\lambda_m(A) = \max_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \min_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \quad (3.22)$$

On a aussi d'après les formules (3.6) :

$$\lambda_m(A) = \min_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \max_{u \in V_{m-1}^\perp, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \quad (3.23)$$

Nous démontrons enfin la complétude des vecteurs propres :

Théorème 3.8 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif qui n'est pas de rang fini et soit $(\lambda_m(A))_{m \geq 1}$ la suite ordonnée de ses valeurs propres. Notons $(w_m)_{m \geq 1}$ une famille orthonormale de E telle que :*

$$Aw_n = \lambda_n w_n.$$

Alors la famille (w_m) est une base hibertienne de $(Ker A)^\perp$. Autrement dit, tout $u \in E$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (u, w_m)_E w_m \quad (3.24)$$

(la série convergeant au sens de E) où $u_0 \in \text{Ker } A$ et l'on a :

$$\|u\|_E^2 = \|u_0\|_E^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |(u, w_m)_E|^2.$$

De plus, la famille (w_m) diagonalise l'opérateur A au sens où :

$$Au = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E w_m.$$

(la série convergeant au sens de E).

DÉMONSTRATION. Soit G l'espace engendré par la famille (w_n) et $F = \text{Ker } A \oplus G$. Pour démontrer que (w_m) est une base de $(\text{Ker } A)^\perp$, il suffit de montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Comme F est stable par A , il en est de même de F^\perp et l'on peut donc définir \tilde{A} , la restriction de A à F^\perp .

Nous allons montrer que $\tilde{A} = 0$, ce qui entrainera, puisque $\text{Ker } A \cap F^\perp = \emptyset$, que $F^\perp = \{0\}$.

Comme \tilde{A} est un opérateur autoadjoint borné, on sait d'après le lemme 3.2 que $\|\tilde{A}\|$ appartient au spectre de \tilde{A} . Si l'on avait $\|\tilde{A}\| > 0$, $\lambda = \|\tilde{A}\|$ serait valeur propre de \tilde{A} et donc de A . Il y aurait donc un vecteur propre de A élément de F^\perp , ce qui est impossible par construction. \square

Corollaire 3.7 Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif et injectif. Alors A admet une suite de valeurs propres strictement positives décroissant vers 0 et il existe une base hibertienne de E formée de vecteurs propres associés.

Remarque 3.1 On déduit en particulier de ce corollaire que dans un espace de Hilbert non séparable, il ne peut pas exister d'opérateur autoadjoint compact positif et injectif.

3.6 Opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Définition 3.3 Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur non borné. Alors A est dit à résolvante compacte si :

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E). \quad (3.25)$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.9 – Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est à résolvante compacte si et seulement si il existe λ tel que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.

– Si A est à résolvante compacte, A est nécessairement non borné.

DÉMONSTRATION. D'après l'identité résolvante (cf.(2.8)) :

$$\forall \lambda, \mu \in (A) \quad R_A(\mu) = R_A(\lambda) - (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu).$$

Par conséquent, $R_A(\mu)$ est compact si $R_A(\lambda)$ l'est.

Supposons que $R_A(\lambda)$ est compact. Alors $0 \in \sigma(R_A(\lambda))$ et par conséquent, il existe une suite (u_n) de E telle que $\|u_n\|_E = 1$ et $R_A(\lambda)u_n \rightarrow 0$ dans E . On pose alors :

$$v_n = \frac{1}{\|R_A(\lambda)u_n\|} R_A(\lambda)u_n.$$

Il est clair que $v_n \in D(A)$ et que $\|v_n\|_E = 1$. De plus, on a :

$$Av_n = \frac{1}{\|R_A(\lambda)u_n\|} u_n + \lambda v_n.$$

Par conséquent $\|Av_n\|_E \rightarrow +\infty$.

□

Nous allons maintenant déduire des résultats de la section précédente la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte. Nous nous restreindrons au cas des opérateurs bornés inférieurement.

Théorème 3.10 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne de E , $\{w_m \in D(A); m \geq 1\}$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que :*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots < +\infty \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m = +\infty \\ Aw_m = \lambda_m w_m, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

De plus, les valeurs λ_m admettent les caractérisations suivantes :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \quad (3.26)$$

et

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u \in V_{m-1}^\perp \cap D(A), u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \quad (3.27)$$

DÉMONSTRATION. Supposons que :

$$(Au, u)_E \geq \lambda_0 \|u\|_E^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Soit $\lambda < \lambda_0$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ et par conséquent, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est compact et injectif. D'après le corollaire 3.7, il existe une base hilbertienne $(w_n)_{n \geq 1}$ de E et une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ décroissante, strictement positive et tendant vers 0 telles que :

$$(A - \lambda I)^{-1} w_n = \mu_n w_n.$$

Il en résulte que :

$$w_n \in D(A) \text{ et } Aw_n = \lambda_n w_n$$

avec $\lambda_n = \lambda + \frac{1}{\mu_n}$.

Les formules de min-max s'obtiennent directement à partir du principe du Min-Max. \square

A l'aide du Principe du Min-Max, on obtient une caractérisation du domaine de l'opérateur A .

Corollaire 3.8 Avec les notations du théorème 3.10, on a :

$$\begin{aligned} - u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 < +\infty. \\ - u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) &\implies Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n w_n. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $u \in D(A)$. Alors $Au \in E$ et par conséquent :

$$Au = \sum_{m=1}^{+\infty} (Au, w_m)_E w_m = \sum_{m=1}^{+\infty} (u, Aw_m)_E w_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E w_m,$$

la série convergeant dans E et :

$$\|Au\|_E^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m^2 (u, w_m)_E^2.$$

Réciproquement, soit $u \in E$ tel que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m^2 (u, w_m)_E^2 < +\infty. \quad (3.28)$$

La suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^N (u, w_m)_E w_m$ tend vers u dans E . De plus, la suite Au_N est de Cauchy dans E . En effet :

$$\|Au_N - Au_M\|_E^2 = \sum_{m=M+1}^N \lambda_m^2 (u, w_m)_E^2 < \varepsilon$$

pour N et M assez grands puisque la série converge. Donc Au_N tend vers v dans E . Comme l'opérateur A est fermé, il en résulte que $u \in D(A)$ et que $Au = v$. \square

Par ailleurs, supposons que A est associé à une forme bilinéaire a de domaine $D(a)$ et que $D(A)$ est un espace de Hilbert lorsque on le munit de la norme $\sqrt{a(u, u) + C\|u\|_E^2}$ pour une constante $C > 0$. Alors, on a :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(a))} \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|_E^2} \quad (3.29)$$

et

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u \in V_{m-1}^\perp \cap D(a), u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|_E^2}. \quad (3.30)$$

De plus, on a la caractérisation suivante de $D(a)$:

Corollaire 3.9 *Avec les notations du théorème 3.10, on a :*

$$\begin{aligned} - u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(a) &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| |u_n|^2 < +\infty. \\ - u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(a) &\implies a(u, u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n^2. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $u \in D(a)$ et posons $b(u, v) = a(u, v) + C(u, v)_E$. Soit la suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^N (u, w_m)_E w_m$. Alors u_N est la projection orthogonale de u sur l'espace engendré par les m fonctions w_1, w_2, \dots, w_m . Par conséquent :

$$b(u_N, u_N) = \sum_{m=1}^N \lambda_m (u, w_m)_E^2 + C \sum_{m=1}^N (u, w_m)_E^2 \leq b(u, u).$$

Ceci prouve que la série de terme général $\lambda_m (u, w_m)_E^2$ converge.

Réciproquement, soit $u \in E$ tel que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E^2 < +\infty. \quad (3.31)$$

La suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^N (u, w_m)_E w_m$ tend vers u dans E . De plus, la suite u_N est de Cauchy dans $D(a)$. En effet :

$$a(u_N - u_M, u_N - u_M) + C \|u_N - u_M\|_E^2 = \sum_{m=M+1}^N (\lambda_m + C) (u, w_m)_E^2 < \varepsilon$$

pour N et M assez grands puisque la série converge. Donc u_N tend vers v dans $D(a)$. Comme on sait par ailleurs que u_N tend vers u dans E , il en résulte que $u = v$ et $u \in D(A)$.

□

Chapitre 4

Théorie des guides d'ondes fermés

4.1 Existence et complétude des modes guidés

Au premier chapitre, nous avons défini le guide d'ondes fermé "modèle" de la façon suivante :

– Domaine de propagation : $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$. Le point courant de $\tilde{\Omega}$ est noté $\tilde{x} = (x, x_3)$. Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ .

Nous ferons sur l'ouvert Ω l'hypothèse de régularité (peu restrictive pour les applications) suivante :

- Γ est une courbe lipschitzienne
 - Ω est localement d'un seul côté de Γ
- Equation de propagation :

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U) = 0. \quad (4.1)$$

Condition aux limites :

$$U|_{\Gamma \times \mathbb{R}} = 0. \quad (4.2)$$

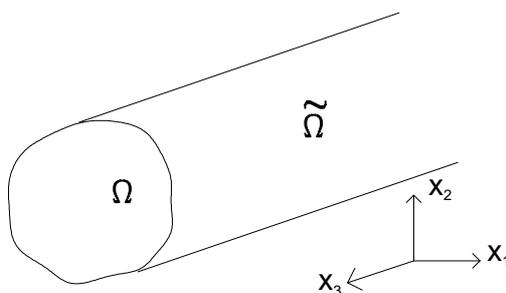


FIGURE 4.1 – Le guide fermé

– Hypothèse sur les coefficients du modèle :

$$\begin{cases} \rho = \rho(x), \mu = \mu(x) \\ 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \text{ p.p. } x \in \Omega \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty \text{ p.p. } x \in \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Une onde guidée est une solution particulière de (4.1) s'écrivant sous la forme :

$$U(x, x_3, t) = \mathcal{R}e(u(x)e^{i(\beta x_3 - \omega t)}) \quad (4.4)$$

Nous avons vu que cela conduisait, pour β fixé, au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \omega^2) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^+ \text{ tels que :} \\ -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u = \omega^2 \rho u \text{ dans } \Omega, \quad u \neq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Précisons maintenant le cadre mathématique adéquat pour l'étude de ce problème. Nous considérons l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} \rho u v dx \quad (4.6)$$

et nous posons :

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Nous introduisons alors l'opérateur non borné $A(\beta)$ de domaine :

$$D(A(\beta)) = \{v \in H_0^1(\Omega) ; \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) \in L^2(\Omega)\}$$

et défini par :

$$\forall u \in D(A(\beta)) \quad A(\beta)u = \frac{1}{\rho} (-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u). \quad (4.7)$$

Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\text{Trouver } (u, \omega) \in D(A(\beta)) \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } A(\beta)u = \omega^2 u \text{ et } u \neq 0. \quad (4.8)$$

Notons que si l'on introduit l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ et la forme bilinéaire symétrique :

$$a(\beta; u, v) = \int_{\Omega} \mu (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \beta^2 uv) dx, \quad \forall u, v \in V, \quad (4.9)$$

alors $A(\beta)$ est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(\beta; \cdot, \cdot)$ au sens où :

$$\forall u \in D(A(\beta)), \forall v \in V, \quad (A(\beta)u, v) = a(\beta; u, v).$$

Nous allons montrer que nous sommes dans le cadre de la théorie décrite dans la section 3.6.

Lemme 4.1 *On a l'encadrement suivant :*

$$\forall u \in V \quad \mu_- \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 + \beta^2 u^2) dx \leq a(\beta; u, u) \leq \mu_+ \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 + \beta^2 u^2) dx. \quad (4.10)$$

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(\beta; \cdot, \cdot)$ est positive, continue sur $V \times V$ et coercive sur V .

DÉMONSTRATION. L'encadrement est immédiat. La coercivité résulte de l'inégalité de Poincaré. □

On déduit de ce lemme et du théorème 2.5 le

Corollaire 4.1 *L'opérateur $A(\beta)$ est autoadjoint sur H et positif.*

Démontrons maintenant le

Lemme 4.2 *L'opérateur $A(\beta)$ est à résolvante compacte.*

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que 0 appartient à l'ensemble résolvant de $A(\beta)$. Il suffit donc de montrer que $A(\beta)^{-1}$ est un opérateur compact.

Soit (f_n) une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Posons :

$$u_n = A(\beta)^{-1} f_n.$$

De l'égalité :

$$A(\beta)u_n = f_n,$$

découle l'identité :

$$a(\beta; u_n, u_n) = (f_n, u_n).$$

On en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f_n\|,$$

où l'on a posé :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx}.$$

Par conséquent, la suite f_n étant bornée dans $L^2(\Omega)$, la suite u_n est bornée dans V . D'après le théorème de Rellich-Kondrashov (cf. [8]), l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte car Ω est bornée. On peut donc extraire de u_n une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$ et c'est ce qu'il fallait démontrer. □

On en déduit d'après le théorème 3.10 le

Théorème 4.1 *Le spectre de $A(\beta)$ est purement ponctuel et constitué par une suite :*

$$0 \leq \lambda_1(\beta) \leq \lambda_2(\beta) \dots \leq \lambda_n(\beta) \dots < +\infty$$

telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(\beta) = +\infty$, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. De plus il existe une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres $(w_n(\beta))$:

$$A(\beta)w_n(\beta) = \lambda_n(\beta)w_n(\beta).$$

Corollaire 4.2 *Le guide d'ondes fermé modèle admet donc une infinité dénombrable de modes guidés définis à une constante près par :*

$$U_n(x, x_3, t) = w_n(\beta; x)e^{i(\beta x_3 - \omega_n(\beta)t)}$$

où l'on a posé :

$$\omega_n(\beta) = \lambda_n(\beta)^{1/2}.$$

A titre d'exemple, citons le cas du guide homogène pour lequel :

$$\rho(x) = \rho_0, \quad \mu(x) = \mu_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

L'équation (4.5) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0, \quad \text{tel que :} \\ -\Delta u = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \beta^2 \right) u \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}$. Notons alors $\{k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2, \dots\}$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ dans Ω avec condition de Dirichlet sur Γ et $\{w_n\}$ la base Hilbertienne de H de vecteurs propres associés de telle sorte que :

$$\begin{cases} -\Delta w_n = k_n^2 w_n \quad \text{dans } \Omega, \quad w_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{et} \\ \rho_0 \int_{\Omega} w_n w_m dx = \delta_{mn}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'on a dans ce cas :

$$\begin{cases} \omega_n(\beta)^2 = c_0^2 (k_n^2 + \beta^2) \\ w_n(\beta) = w_n. \end{cases}$$

Autrement dit, dans le plan (β^2, ω^2) , les courbes de dispersion sont des droites de pente c_0^2 . De plus, les fonctions propres sont indépendantes de β .

4.2 Propriétés des modes guidés

Dans ce paragraphe, nous considérons un guide non homogène pour lequel nous ne connaissons pas explicitement la dépendance des modes guidés par rapport à β . Nous allons tout d'abord nous intéresser aux propriétés de la relation de dispersion de chaque mode, c'est-à-dire aux fonctions :

$$\beta \longrightarrow \omega_n(\beta), \quad \beta \geq 0, n \geq 1.$$

Notons que grâce au principe du Min-Max énoncé au chapitre 3, nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_n(\beta)^2 &= \max_{F \in \mathcal{V}_{n-1}(H)} \min_{u \in F^\perp \cap V, u \neq 0} \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \\ &= \min_{F \in \mathcal{V}_n(V)} \max_{u \in F, u \neq 0} \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \end{aligned}$$

Posons

$$\left| \begin{aligned} c(x) &= \left(\frac{\mu(x)}{\rho(x)} \right)^{1/2} \\ c_- &= \inf c(x), \quad c_+ = \sup c(x). \end{aligned} \right.$$

La fonction $c(x)$ représente la vitesse de propagation locale des ondes au point x . Par ailleurs, la vitesse de phase du n -ième mode guidé dans la direction x_3 vaut :

$$c_n(\beta) = \frac{\omega_n(\beta)}{\beta}.$$

Proposition 4.1 *Pour tout $n \geq 1$, les fonctions $\beta \longrightarrow \omega_n(\beta)^2$ sont localement lipschitziennes et strictement croissantes. De même, les fonctions $\beta \longrightarrow c_n(\beta)^2$ sont localement lipschitziennes et strictement décroissantes. De plus, on a l'encadrement :*

$$\omega_n(0)^2 + c_-^2 \beta^2 \leq \omega_n(\beta)^2 \leq \omega_n(0)^2 + c_+^2 \beta^2, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall \beta > 0. \quad (4.11)$$

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que, pour tout $u \in V$, on a :

$$\int_{\Omega} \mu |u|^2 dx = \int_{\Omega} c^2 \rho |u|^2 dx,$$

et par conséquent :

$$c_-^2 \|u\|^2 \leq \int_{\Omega} \mu |u|^2 dx \leq c_+^2 \|u\|^2.$$

Soient $\beta_1 < \beta_2$ et $u \in V$, $u \neq 0$. D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{a(\beta_1; u, u)}{\|u\|^2} + c_-^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) \leq \frac{a(\beta_2; u, u)}{\|u\|^2} \leq \frac{a(\beta_1; u, u)}{\|u\|^2} + c_+^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2).$$

Des formules de min-max, on déduit alors :

$$\omega_n(\beta_1)^2 + c_-^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) \leq \omega_n(\beta_2)^2 \leq \omega_n(\beta_1)^2 + c_+^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2).$$

Ceci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c_-^2 \leq \frac{\omega_n(\beta_2)^2 - \omega_n(\beta_1)^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \leq c_+^2.$$

L'inégalité de gauche fournit la croissance stricte de la fonction $\omega_n(\beta)^2$ et celle de droite son caractère lipschitzien. Le caractère lipschitzien de $c_n(\beta)$ s'en déduit également. En prenant $\beta_1 = 0$, on trouve l'encadrement de (4.11).

On a par ailleurs, pour tout $u \in V$:

$$\frac{1}{\beta_2^2} \frac{a(\beta_2; u, u)}{\|u\|^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \frac{a(\beta_1; u, u)}{\|u\|^2} = \left(\frac{1}{\beta_2^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right) \frac{\int_{\Omega} \mu |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho |u|^2 dx}.$$

Par conséquent :

$$c_n(\beta_2)^2 \leq c_n(\beta_1)^2 - \left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right) \omega_1(0)^2.$$

Ceci démontre la décroissance stricte de la vitesse de phase du n -ième mode guidé. \square

Nous allons maintenant étudier le comportement des modes guidés lorsque $\beta \rightarrow +\infty$, c'est à dire lorsque la fréquence tend vers l'infini (d'après (4.11), $\omega_n(\beta)$ tend vers l'infini avec β).

Lemme 4.3 *La vitesse de phase $c_n(\beta)$ du n -ième mode guidé tend vers c_- quand β tend vers $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, nous supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule de rayon ε notée B_ε telle que :

$$c(x)^2 \leq c_-^2 + \varepsilon \quad \forall x \in B_\varepsilon. \quad (4.12)$$

Ceci est automatiquement vrai si $c(x)$ est continue par morceaux.

On peut alors comparer les valeurs de $\omega_n(\beta)$ à celles que l'on aurait obtenues si l'on avait considéré un second guide fermé de domaine B_ε et de coefficients ρ et μ . Notons $\omega_n^\varepsilon(\beta)$ les courbes de dispersion associées. En assimilant $H_0^1(B_\varepsilon)$ à un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$, on établit directement à l'aide des formules de min-max les inégalités suivantes :

$$\omega_n(\beta)^2 \leq \omega_n^\varepsilon(\beta)^2 \quad \forall \beta, \forall n \geq 1.$$

Or $\omega_n^\varepsilon(\beta)$ est caractérisé par la formule suivante :

$$\omega_n^\varepsilon(\beta)^2 = \min_{F \in \mathcal{V}_n(H_0^1(B_\varepsilon))} \max_{u \in F, u \neq 0} \frac{\int_{B_\varepsilon} \mu |\nabla u|^2 dx + \beta^2 \int_{B_\varepsilon} \mu |u|^2 dx}{\int_{B_\varepsilon} \rho |u|^2 dx}.$$

D'après (4.12), on en déduit :

$$\omega_n^\varepsilon(\beta)^2 \leq \omega_n^\varepsilon(0)^2 + \beta^2 (c_-^2 + \varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout ε , il en résulte que :

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_n(\beta)^2}{\beta^2} \leq \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_n^\varepsilon(\beta)^2}{\beta^2} \leq c_-^2.$$

Par ailleurs, d'après (4.11) :

$$c_n(\beta)^2 \geq c_-^2 \quad \forall \beta.$$

Le résultat s'en déduit. □

Pour conclure, nous allons nous intéresser aux propriétés des fonctions propres $w_n(\beta)$.

Corollaire 4.3 *Soit $w_m(\beta)$ une fonction propre de l'opérateur $A(\beta)$ associée à la valeur propre $\lambda_m(\beta) = \omega_m(\beta)^2$ et normalisée dans H . Alors :*

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \rho (c^2(x) - c_-^2) |w_m(\beta)|^2 dx = 0.$$

DÉMONSTRATION. De l'identité

$$a(\beta; w_m(\beta), w_m(\beta)) = \omega_m^2(\beta),$$

on déduit l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu |\text{grad } w_m(\beta)|^2 + \beta^2 \rho (c^2 - c_-^2) |w_m(\beta)|^2 \right\} dx = \omega_m^2(\beta) - \beta^2 c_-^2.$$

On a donc :

$$\int_{\Omega} \rho (c^2(x) - c_-^2) |w_m(\beta)|^2 dx \leq \omega_m^2(\beta) - \beta^2 c_-^2.$$

Le corollaire se déduit alors du lemme précédent. □

Remarque 4.1 *Physiquement, ce résultat traduit le fait que l'énergie transverse d'un mode guidé tend à haute fréquence à se concentrer là où la vitesse est minimale.*

Chapitre 5

Théorie des guides d'ondes ouverts

5.1 Problème modèle - Cadre mathématique

Au premier chapitre, nous avons défini le guide d'ondes ouvert "modèle" de la façon suivante :

- Le domaine de propagation est donné par : $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^3$. Le point courant de $\tilde{\Omega}$ est noté $\tilde{x} = (x, x_3)$ où $x \in \mathbb{R}^2$.
- L'équation de propagation est tout comme au chapitre précédent :

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U) = 0.$$

- Les hypothèses sur les coefficients du modèle sont identiques au cas du guide fermé :

$$\begin{cases} \rho = \rho(x), \mu = \mu(x) \\ 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^2 \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

mais on fait de plus l'hypothèse que le milieu non perturbé est homogène *i.e.* :

$$\rho(x) = \rho_\infty, \mu(x) = \mu_\infty \text{ si } |x| \geq R. \quad (5.1)$$

On utilisera les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} c(x) = \left(\frac{\mu(x)}{\rho(x)} \right)^{1/2} \\ c_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\frac{\mu(x)}{\rho(x)} \right)^{1/2} \\ c_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\frac{\mu(x)}{\rho(x)} \right)^{1/2} \\ c_\infty = \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Une onde guidée est une solution particulière de l'équation de propagation s'écrivant sous la forme :

$$U(x, x_3, t) = \mathcal{R}e(u(x)e^{i(\beta x_3 - \omega t)})$$

et vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx < +\infty. \quad (5.2)$$

Cela conduit, pour β fixé, au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \omega^2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^+ \text{ tels que :} \\ -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u = \omega^2 \rho u \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ et } u \neq 0. \end{cases}$$

Nous considérons l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho uv dx$$

et de la norme associée :

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

et l'opérateur non borné $A(\beta)$ de domaine :

$$D(A(\beta)) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) ; \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

défini par :

$$\forall u \in D(A(\beta)) \quad A(\beta)u = \frac{1}{\rho} (-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u).$$

Cet opérateur est associé à la forme bilinéaire symétrique :

$$a(\beta; u, v) = \int_{\mathbb{R}} \mu (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \beta^2 uv) dx, \quad \forall u, v \in V,$$

de domaine $V = H^1(\mathbb{R}^2)$. Tout comme dans le cas du guide fermé, on a le résultat suivant :

Lemme 5.1 *La forme bilinéaire $a(\beta; \cdot, \cdot)$ vérifie :*

$$\forall u \in V \quad \mu_- \int_{\mathbb{R}} (|\operatorname{grad} u|^2 + \beta^2 u^2) dx \leq a(\beta; u, u) \leq \mu_+ \int_{\mathbb{R}} (|\operatorname{grad} u|^2 + \beta^2 u^2) dx. \quad (5.3)$$

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(\beta; \cdot, \cdot)$ est positive, continue sur $V \times V$ et coercive si $\beta > 0$.

On déduit de ce lemme, du théorème 2.5 et du corollaire 3.2 le

Corollaire 5.1 *L'opérateur $A(\beta)$ est autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et son spectre $\sigma(\beta)$ vérifie :*

$$\sigma(\beta) \subset [c_-^2 \beta^2, +\infty[. \quad (5.4)$$

DÉMONSTRATION. Pour établir l'inclusion, il suffit de remarquer que, pour tout $u \in V$:

$$a(\beta; u, u) \geq \beta^2 \int_{\mathbb{R}} \mu u^2 dx = \beta^2 \int_{\mathbb{R}} c^2 \rho u^2 dx \geq \beta^2 c_-^2 \|u\|^2.$$

□

La différence fondamentale avec le cas du guide d'ondes fermé est que l'injection de $V = H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ n'est plus compacte. Démontrons le

Lemme 5.2 *L'opérateur $A(\beta)$ n'est pas à résolvante compacte.*

DÉMONSTRATION. On remarque que -1 appartient à l'ensemble résolvant de $A(\beta)$. Nous allons démontrer que l'opérateur $(A(\beta) + I)^{-1}$ n'est pas compact. Soit $v_0(x)$ une fonction satisfaisant :

$$v_0 \in \mathcal{D}(\Omega), v_0 \neq 0, \text{ supp } v_0 \subset B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Posons : $u_0 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} (-\Delta v_0 + \beta^2 v_0 + v_0)$ et $u_n(x) = u_0(x_1 - n, x_2)$. On vérifie aisément que, pour n assez grand, $u_n \in D(A(\beta))$ et :

$$(A(\beta) + I)^{-1} u_n = v_n \quad \text{où} \quad v_n(x) = v_0(x_1 - n, x_2).$$

La suite u_n est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Si l'opérateur $(A(\beta) + I)^{-1}$ était compact, on pourrait donc extraire de la suite v_n une sous-suite fortement convergente dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers v . Mais comme $(v_n, v_m) = 0$ si $n \neq m$ (puisque leurs supports sont disjoints), on aurait nécessairement $v = 0$, ce qui est impossible puisque :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |v_0|^2 dx.$$

□

L'opérateur $A(\beta)$ n'étant pas à résolvante compacte, on ne peut pas savoir a priori s'il a ou non des valeurs propres.

Nous pouvons tout de suite exhiber un exemple pour lequel $A(\beta)$ n'a pas de valeurs propres. C'est le cas du milieu homogène :

$$\rho(x) = \rho_\infty, \quad \mu(x) = \mu_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

L'opérateur correspondant sera noté dans la suite $A_\infty(\beta)$. On a :

$$D(A_\infty(\beta)) = H^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad A_\infty(\beta)u = c_\infty^2 (-\Delta u + \beta^2 u).$$

Introduisons la transformation de Fourier dans \mathbb{R}^2 :

$$u \in L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}u = \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

qui transforme la fonction u de la variable x en la fonction \hat{u} de la variable ξ . On a alors :

$$\hat{A}_\infty(\beta)\hat{u} = \mathcal{F}(A_\infty(\beta)(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})) = c_\infty^2(|\xi|^2 + \beta^2)\hat{u}.$$

Par conséquent, l'opérateur $\hat{A}_\infty(\beta)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $c_\infty^2(|\xi|^2 + \beta^2)$. On sait donc qu'il n'a pas de valeur propre et que son spectre est constitué par l'intervalle $[c_\infty^2\beta^2, +\infty[$. Il en est de même pour $A_\infty(\beta)$ puisque \mathcal{F} est un opérateur unitaire.

Ainsi, nous savons déjà qu'il ne peut exister de mode guidés si les coefficients ρ et μ sont constants. Nous allons voir dans la suite que le milieu ne peut guider des ondes que si la vitesse admet un minimum local, ce qui se traduit par certaines conditions sur les coefficients ρ et μ .

L'étude qui suit repose sur la théorie décrite au chapitre précédent et qui concerne les opérateurs autoadjoints bornés inférieurement.

La première étape, afin de pouvoir appliquer le Principe du Min-Max, est de déterminer le spectre essentiel de $A(\beta)$.

5.2 Détermination du spectre essentiel

L'idée principale consiste à considérer l'opérateur $A(\beta)$ comme une perturbation de l'opérateur $A_\infty(\beta)$ et à montrer que les spectres essentiels de ces deux opérateurs coïncident.

Or on a vu ci-dessus que l'opérateur $A_\infty(\beta)$ est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication dont on sait déterminer le spectre. Ainsi, nous avons montré que :

$$\sigma(A_\infty(\beta)) = [c_\infty^2\beta^2, +\infty[.$$

Notons $\sigma_{ess}(A_\infty(\beta))$ le spectre essentiel de $A_\infty(\beta)$. On a vu au chapitre précédent que tout point d'accumulation du spectre est dans le spectre essentiel.

$$\sigma_{ess}(A_\infty(\beta)) = [c_\infty^2\beta^2, +\infty[. \quad (5.5)$$

Nous allons maintenant établir le

Théorème 5.1 *Le spectre essentiel de l'opérateur $A(\beta)$ est égal à l'intervalle $[c_\infty^2\beta^2, +\infty[$.*

Ce théorème sera une conséquence directe des lemmes suivants.

Lemme 5.3

$$[c_\infty^2\beta^2, +\infty[\subset \sigma_{ess}(A(\beta))$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \geq c_\infty^2\beta^2$ et soit ξ tel que $c_\infty^2(\beta^2 + |\xi|^2) = \lambda$. Alors on a :

$$c_\infty^2(-\Delta + \beta^2)(e^{ix \cdot \xi}) = c_\infty^2(\beta^2 + |\xi|^2)e^{ix \cdot \xi} = \lambda e^{ix \cdot \xi}. \quad (5.6)$$

Soit φ une fonction vérifiant :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \varphi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2 \text{ et } \|\varphi\| = 1. \quad (5.7)$$

Posons alors :

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{n} - 4, \frac{x_2}{n}\right) \text{ et } u_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_n(x)e^{ix \cdot \xi}.$$

Par construction, $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et le support de u_n est contenu dans le disque de centre $(4n, 0)$ et de rayon $2n$. Par conséquent, pour n assez grand, u_n est identiquement nul sur le disque de centre O et de rayon R . Donc, pour n assez grand :

$$u_n \in D(A(\beta)).$$

Par ailleurs, on a :

$$\|u_n\|^2 = \rho_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_n(x)|^2 dx = \frac{\rho_\infty}{n^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_n(x)|^2 dx = \rho_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx.$$

Donc $\|u_n\| = 1$. Enfin, un simple calcul de dérivation montre que :

$$\begin{aligned} A(\beta)u_n &= A_\infty(\beta)u_n = \frac{1}{n}c_\infty^2 (\beta^2 + |\xi|^2) \varphi_n(x) \\ &\quad - \frac{1}{n}c_\infty^2 (2\nabla\varphi_n \cdot \nabla(e^{ix \cdot \xi}) + e^{ix \cdot \xi} \Delta\varphi_n) \end{aligned}$$

Compte tenu de (5.6), il vient :

$$A(\beta)u_n - \lambda u_n = -\frac{1}{n}c_\infty^2 (2i\xi \cdot \nabla\varphi_n + \Delta\varphi_n) e^{ix \cdot \xi}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

on obtient :

$$\|A(\beta)u_n - \lambda u_n\|^2 \leq \frac{2}{n^2}c_\infty^4 (\|\Delta\varphi_n\|^2 + 4|\xi|^2 \|\nabla\varphi_n\|^2)$$

mais il est facile de voir que :

$$\|\nabla\varphi_n\| = \|\nabla\varphi\| \text{ et } \|\Delta\varphi_n\| = \frac{1}{n}\|\Delta\varphi\|.$$

Cela prouve finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(\beta)u_n - \lambda u_n\| = 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que u_n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_n v dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Le résultat s'en déduit par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

□

Pour montrer l'inclusion inverse, nous utiliserons le :

Lemme 5.4 *Pour tout v dans V , on a :*

$$a(\beta; v, v) = c_\infty^2 \beta^2 \|v\|^2 + p(\beta; v, v) + c(\beta; v, v)$$

avec :

$$\begin{aligned} p(\beta; v, v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu |\nabla v|^2 dx \\ c(\beta; v, v) &= \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \rho (c^2 - c_\infty^2) |v|^2 \rho dx \end{aligned}$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

- $\forall v \in V \quad p(\beta; v, v) \geq 0$.
- Si v_n tend faiblement vers v dans V , alors $c(\beta; v_n, v_n)$ tend vers $c(\beta; v, v)$ quand n tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in V$. On a :

$$a(\beta; v, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu |\nabla v|^2 dx + \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mu |v|^2 dx.$$

Comme de plus :

$$\mu = \rho c^2 = \rho c_\infty^2 - \rho (c_\infty^2 - c^2)$$

la décomposition s'en déduit. La positivité de $p(\beta; \cdot, \cdot)$ est évidente. Démontrons le dernier point.

Soit donc v_n une suite faiblement convergente de V de limite v . Notons D_R le disque de centre O et de rayon R . Alors la suite des restrictions de v_n à D_R est bornée dans $H^1(D_R)$. L'injection de $H^1(D_R)$ dans $L^2(D_R)$ étant compacte, on peut extraire de la suite v_n une sous-suite, encore notée v_n , telle que la suite $v_n|_{D_R}$ converge dans $L^2(D_R)$ vers une limite \tilde{v} . Mais comme par ailleurs, v_n converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on a nécessairement :

$$\tilde{v} = v|_{D_R}.$$

La limite étant unique, c'est toute la suite v_n dont la restriction à D_R converge vers celle de v dans $L^2(D_R)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $c_\infty^2 - c^2(x) = 0$ si $x \notin D_R$.

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Lemme 5.5 *On a l'inclusion :*

$$\sigma_{ess}(A(\beta)) \subset [c_\infty^2 \beta^2, +\infty[.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(A(\beta))$. Par définition, il existe une suite singulière u_n telle que :

$$\begin{cases} \|u_n\| = 1 \\ u_n \rightharpoonup 0 & \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^2) \\ Au_n - \lambda u_n \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Montrons que u_n est bornée dans V . Il existe une constante C telle que :

$$\forall n > 0 \quad |(Au_n - \lambda u_n, u_n)| \leq C.$$

Donc :

$$a(\beta; u_n, u_n) = (A(\beta)u_n, u_n) \leq C + \lambda.$$

En particulier :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mu |\nabla u_n|^2 dx \leq C + \lambda,$$

ce qui prouve, puisque $\|u_n\| = 1$ que u_n est bornée dans V . Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } V.$$

De plus, on a :

$$a(\beta; u_n, u_n) = (A(\beta)u_n - \lambda u_n, u_n) + \lambda.$$

Par conséquent :

$$a(\beta; u_n, u_n) \longrightarrow \lambda \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Mais par ailleurs d'après le lemme précédent :

$$a(\beta; u_n, u_n) \geq c_\infty^2 \beta^2 + c(\beta; u_n, u_n)$$

or

$$c(\beta; u_n, u_n) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'où finalement :

$$\lambda \geq c_\infty^2 \beta^2.$$

□

5.3 Principe du Min-Max et courbes de dispersion

Le spectre essentiel de $A(\beta)$ ayant été déterminé, nous sommes maintenant en mesure d'étudier les valeurs propres situées en dessous du spectre essentiel à l'aide du Principe de Min-Max. Nous introduisons donc la suite des min-max $(\lambda_m(\beta))_{m \geq 1}$ associés à l'opérateur $A(\beta)$ et définis par des formules analogues aux formules (3.29) et (3.30).

On a donc par exemple :

$$\lambda_1(\beta) = \inf_{u \in V, u \neq 0} \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2}$$

et plus généralement pour $m \geq 1$:

$$\lambda_m(\beta) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(V)} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2}$$

où $\mathcal{V}_m(V)$ désigne l'ensemble des sous-espaces de V de dimension m .

On a :

$$c_-^2 \beta^2 \leq \lambda_1(\beta) \leq \lambda_2(\beta) \dots \leq \lambda_m(\beta) \leq c_\infty^2 \beta^2.$$

On s'intéressera essentiellement dans la suite aux valeurs propres de $A(\beta)$ strictement inférieures à $c_\infty^2\beta^2$, la borne inférieure du spectre essentiel, et cela pour deux raisons. La première est que ces valeurs propres sont les seules que l'on peut étudier de façon systématique à l'aide du principe du min-max. Par ailleurs, on peut montrer que le champ associé est exponentiellement décroissant : il s'agit donc de modes bien confinés. En revanche, si $c_\infty^2\beta^2$ est valeur propre (on peut montrer qu'il existe une infinité de valeurs de β pour lesquelles c'est le cas), alors le champ associé décroît seulement comme l'inverse d'une puissance de la distance à l'origine. Enfin, on sait également montrer, sous des hypothèses peu restrictives sur les coefficients ρ et μ , qu'il n'existe pas de valeurs propres strictement supérieures à $c_\infty^2\beta^2$.

Par abus de langage, on appellera donc désormais **mode guidé** tout mode tel que $\omega^2 < c_\infty^2\beta^2$. D'après le Principe du Min-Max le nombre de modes guidés $N(\beta)$ est donc défini par :

$$N(\beta) = \sup \{ m \geq 1; \lambda_m(\beta) < c_\infty^2\beta^2 \}.$$

Les courbes décrites par les fonctions $\beta \rightarrow \lambda_m(\beta)$ lorsque $\lambda_m(\beta) < c_\infty^2\beta^2$ sont appelées les **courbes de dispersion des modes guidés**.

On démontre aisément diverses propriétés de ces courbes.

Lemme 5.6

- Les fonctions $\beta \rightarrow \lambda_m(\beta)$ sont croissantes.
- Les fonctions $\beta \rightarrow \lambda_m(\beta) - c_\infty^2\beta^2$ sont décroissantes.

DÉMONSTRATION. Les fonctions λ_m sont croissantes car l'inf et le sup d'une famille de fonctions croissantes sont également des fonctions croissantes. Or, pour tout u fixé, la fonction $\beta \rightarrow \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2}$ est trivialement croissante.

De même, comme $\lambda_m(\beta) \leq c_\infty^2\beta^2$, on a :

$$\lambda_m(\beta) - c_\infty^2\beta^2 = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(V)} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \min \left(0, \frac{a(\beta; u, u) - c_\infty^2\beta^2\|u\|^2}{\|u\|^2} \right).$$

Il suffit donc de vérifier que, u étant fixé, la fonction

$$\beta \rightarrow \min \left(0, \frac{a(\beta; u, u) - c_\infty^2\beta^2\|u\|^2}{\|u\|^2} \right)$$

est décroissante. C'est effectivement le cas car la fonction

$$\beta \rightarrow \frac{a(\beta; u, u) - c_\infty^2\beta^2\|u\|^2}{\|u\|^2}$$

décrit une parabole de la forme $P\beta^2 + R$ avec un coefficient R positif. La figure 5.1 permet aisément de conclure. □

Le résultat précédent a une conséquence essentielle. Il assure la croissance du nombre de modes guidés :

Corollaire 5.2 *La fonction $\beta \rightarrow N(\beta)$ est croissante.*

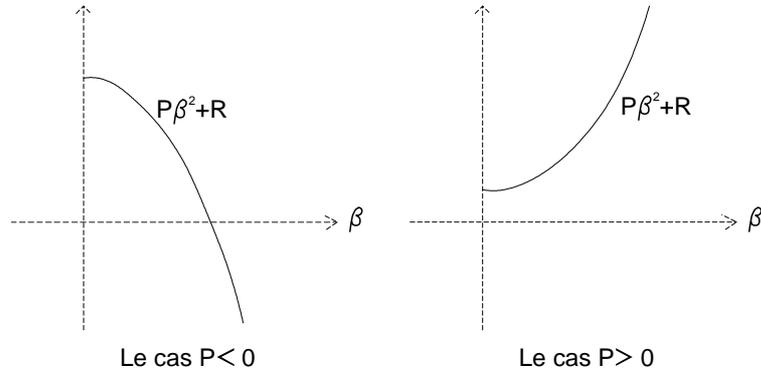


FIGURE 5.1 – Illustration du lemme 5.6

5.4 Résultats d'existence pour le mode fondamental

On appelle **mode fondamental** du guide le mode associé à la plus petite valeur propre de $A(\beta)$, strictement inférieure à la borne inférieure du spectre essentielle $c_\infty^2 \beta^2$, si elle existe.

Dans ce paragraphe, nous allons établir des conditions d'existence de ce mode.

Du corollaire 5.1, on déduit tout d'abord le résultat de non-existence suivant :

Lemme 5.7 *Si $c_- = c_\infty$ (c'est-à-dire si $c(x) \geq c_\infty$ pour presque tout x) alors $N(\beta) = 0$. Autrement dit, sous cette condition, il n'existe pas de modes guidés tels que $\omega^2 < c_\infty^2 \beta^2$.*

Réciproquement, nous allons montrer que si la vitesse $c(x)$ prend des valeurs strictement plus petites que c_∞ , alors le mode fondamental existe, au moins à haute fréquence.

Théorème 5.2 *Si $c_- < c_\infty$, alors $\lambda_1(\beta) < c_\infty^2 \beta^2$ pour β assez grand. L'opérateur $A(\beta)$ admet donc au moins une valeur propre pour β assez grand.*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la démonstration, nous supposons que $c(x)$ vérifie l'hypothèse plus forte suivante :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon > 0; c_\varepsilon = \sup_{|x-x_0| < \varepsilon} c(x) < c_\infty. \quad (5.8)$$

Soit $\tilde{u} \in H_0^1(B(x_0, \varepsilon))$ où $B(x_0, \varepsilon)$ désigne la boule de centre x_0 et de rayon ε une fonction non nulle. Alors \tilde{u} peut se prolonger canoniquement en une fonction u de V telle que :

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{si } x \in B(x_0, \varepsilon) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc :

$$\frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2} = \frac{\int_{B(x_0, \varepsilon)} \mu \left(|\text{grad } \tilde{u}|^2 + \beta^2 \tilde{u}^2 \right) dx}{\int_{B(x_0, \varepsilon)} \rho \tilde{u}^2 dx}.$$

Or, par hypothèse :

$$\int_{B(x_0, \varepsilon)} \mu \tilde{u}^2 dx = \int_{B(x_0, \varepsilon)} c^2 \rho \tilde{u}^2 dx \leq c_\varepsilon^2 \int_{B(x_0, \varepsilon)} \rho \tilde{u}^2 dx.$$

Par conséquent :

$$\frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2} < \frac{\int_{B(x_0, \varepsilon)} \mu |\text{grad } \tilde{u}|^2 dx}{\int_{B(x_0, \varepsilon)} \rho \tilde{u}^2 dx} + \beta^2 c_\varepsilon^2.$$

Comme $c_\varepsilon < c_\infty$, il en résulte que $\lambda_1(\beta) < \beta^2 c_\infty^2$ pour β assez grand. □

Nous allons maintenant établir une condition, nécessaire et suffisante, pour que le mode fondamental existe pour tout $\beta > 0$.

Théorème 5.3 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1.

$$N(\beta) \geq 1, \quad \forall \beta > 0.$$

2.

$$c_- < c_\infty \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \rho (c^2 - c_\infty^2) dx \leq 0.$$

DÉMONSTRATION. Première partie : démontrons que (1) implique (2).

On sait déjà que la condition $c_- < c_\infty$ est nécessaire. De plus, si (1) est vrai, il existe $u(\beta) \in D(A(\beta))$ tel que $a(\beta; u(\beta), u(\beta)) < c_\infty^2 \beta^2 \|u(\beta)\|^2$. On choisit de normaliser $u(\beta)$ comme suit :

$$\int_{B_R} u(\beta)^2 dx = 1$$

où B_R est la boule de centre O et de rayon R . Ceci implique en particulier que :

$$\int_{\Omega} \mu |\text{grad } u(\beta)|^2 dx \leq \|c^2 - c_\infty^2\|_{L^\infty(B_R)} \beta^2.$$

Par conséquent, si β reste borné, $u(\beta)$ est borné dans $H^1(B_R)$. Par compacité, on peut donc trouver une suite β_n tendant vers 0 telle que la suite $u_n = u(\beta_n)$ vérifie :

$$u_n \longrightarrow u \text{ in } L^2(B_R) \tag{5.9}$$

$$\text{grad } u_n \longrightarrow 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2) \tag{5.10}$$

$$\int_{B_R} \rho |u_n|^2 dx = 1 \tag{5.11}$$

$$\int_{B_R} \rho (c^2 - c_\infty^2) |u_n|^2 dx < 0. \tag{5.12}$$

De (5.9) et (5.10), on déduit que u est une fonction constante. De plus, elle ne peut être nulle d'après (5.11). En passant à la limite dans (5.12), on obtient donc la condition cherchée :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho (c^2 - c_\infty^2) dx \leq 0. \tag{5.13}$$

Deuxième partie : démontrons maintenant la réciproque. Supposons tout d'abord que l'inégalité (5.13) est stricte. Soit, pour $M > 0$, la fonction u_M définie ainsi :

$$u_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < R \\ \text{Log} \frac{|x|}{M} \left(\text{Log} \frac{R}{M}\right)^{-1} & \text{si } R < |x| < M \\ 0 & \text{si } |x| > M \end{cases}$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\text{grad } u_M|^2 dx = 2\pi \left(\text{Log} \frac{M}{R}\right)^{-1}.$$

En particulier :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\text{grad } u_M|^2 dx = 0.$$

De plus, comme u_M vaut 1 sur B_R (pour M assez grand), on a :

$$a(\beta; u_M, u_M) - \beta^2 c_\infty^2 \|u_M\|^2 \leq \mu_+ \int_{\mathbb{R}^2} |\text{grad } u_M|^2 dx + \beta^2 \int_{B_R} \rho(c^2 - c_\infty^2) dx.$$

Par conséquent, $a(\beta; u_M, u_M) - \beta^2 c_\infty^2 \|u_M\|^2$ devient négatif pour M assez grand.

Si l'inégalité (5.13) est une égalité, il faut considérer la fonction test $u_M^\delta = u_M + \delta w$ où w est telle que $\int_{B_R} \rho(c^2 - c_\infty^2) w dx \neq 0$. Le résultat s'obtient alors pour δ assez petit. □

5.5 Etude des autres modes et notion de seuil

Nous allons maintenant montrer que sous la condition $c_- < c_\infty$, il existe pour tout $m \geq 1$ une valeur β_m telle que le guide admette au moins m modes guidés pour $\beta > \beta_m$ et au plus $m - 1$ pour $\beta \leq \beta_m$. Ces valeurs sont appelées les **seuils d'apparition** des modes guidés.

Théorème 5.4 *Supposons $c_- < c_\infty$. Alors, pour tout $m \geq 1$, il existe un réel $\beta_m \geq 0$ tel que :*

- Pour tout $\beta \leq \beta_m$, l'opérateur $A(\beta)$ a au plus $m - 1$ valeurs propres dans l'intervalle $[c_-^2 \beta^2, c_\infty^2 \beta^2[$.
- Pour tout $\beta > \beta_m$, l'opérateur $A(\beta)$ a au moins m valeurs propres dans l'intervalle $[c_-^2 \beta^2, c_\infty^2 \beta^2[$.

L'allure générale des courbes de dispersion est représentée sur la figure 5.2. Ce théorème est une conséquence du corollaire 5.2, qui assure la croissance du nombre de modes guidés, et du lemme suivant :

Lemme 5.8 *Supposons $c_- < c_\infty$. Alors, pour tout $m \geq 1$, on a :*

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_m(\beta)}{\beta^2} = c_-^2. \quad (5.14)$$

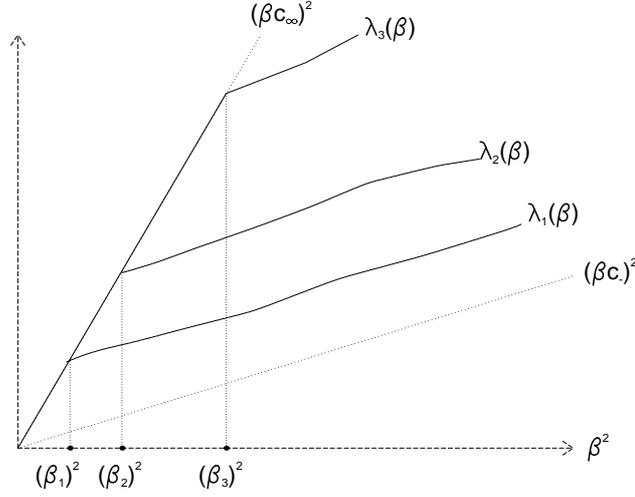


FIGURE 5.2 – Courbes de dispersion

DÉMONSTRATION. On procède exactement comme dans la démonstration du lemme 4.3. \square

Pour compléter le résultat ci-dessus, il nous faut démontrer le

Théorème 5.5 *La suite des seuils (β_m) tend vers $+\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. Autrement dit, le nombre de modes guidés $N(\beta)$, à β donné, est fini.*

DÉMONSTRATION. Soit Ω un domaine borné inclus dans \mathbb{R}^2 tel que les fonctions μ et ρ soient constantes, égales à μ_∞ et ρ_∞ , à l'extérieur de Ω (on peut par exemple choisir $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq R\}$). Pour démontrer le théorème, nous allons comparer les valeurs $\lambda_m(\beta)$ aux valeurs propres λ de l'opérateur $A_N(\beta)$ défini comme suit :

$$D(A_N(\beta)) = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

et :

$$\forall u \in D(A_N(\beta)) \quad A_N(\beta)u = \frac{1}{\rho} (-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u).$$

Cet opérateur est associé à la forme bilinéaire symétrique :

$$a_N(\beta; u, v) = \int_{\Omega} \mu (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \beta^2 uv) dx$$

de domaine $H^1(\Omega)$.

L'étude de cet opérateur peut se faire de manière similaire à l'étude de l'opérateur $A(\beta)$ associé au guide fermé présenté au chapitre 4. La seule différence est que l'espace $H_0^1(\Omega)$ a été remplacé par l'espace $H^1(\Omega)$. Autrement dit, la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ est remplacée par une condition de Neumann.

On vérifie aisément que $A_N(\beta)$ est un opérateur positif à résolvante compacte. Son spectre est donc purement ponctuel constitué d'une suite :

$$0 < \lambda_1^N(\beta) \leq \lambda_2^N(\beta) \dots \leq \lambda_n^N(\beta) \dots < +\infty$$

telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^N(\beta) = +\infty$, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. De plus il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée de vecteurs propres ($w_n^N(\beta)$) :

$$A_N(\beta)w_n^N(\beta) = \lambda_n^N(\beta)w_n^N(\beta).$$

Enfin, on montre que l'on a les caractérisations suivantes :

$$\lambda_1^N(\beta) = \inf_{u \in H^1(\Omega), u \neq 0} \frac{a_N(\beta; u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

et plus généralement pour $m > 1$:

$$\lambda_m^N(\beta) = \sup_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(L^2(\Omega))} \inf_{u \in V_{m-1}^\perp \cap H^1(\Omega), u \neq 0} \frac{a_N(\beta; u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

où $\mathcal{V}_m(L^2(\Omega))$ désigne l'ensemble des sous-espaces de $L^2(\Omega)$ de dimension m .

Admettons pour l'instant le

Lemme 5.9 *Pour tout $m \geq 1$, on a :*

$$\lambda_m(\beta) \geq \min(\lambda_m^N(\beta), \beta^2 c_\infty^2). \quad (5.15)$$

Comme, à β fixé, la suite $\lambda_m^N(\beta)$ tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$, il en résulte que $\lambda_m(\beta) = \beta^2 c_\infty^2$ pour m assez grand. Autrement dit, $N(\beta)$ est fini pour toute valeur de β .

Démontrons maintenant le lemme 5.9.

On considère tout d'abord le cas $m = 1$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction qui n'est pas identiquement nulle sur Ω . On a :

$$a(\beta; u, u) = a_N(\beta; u, u) + \tilde{a}(\beta; u, u)$$

où $\tilde{a}(\beta; u, u) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} \mu (|\text{grad } u|^2 + \beta^2 u^2) dx$. Par définition de $\lambda_1^N(\beta)$, on a :

$$a_N(\beta; u, u) \geq \lambda_1^N(\beta) \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus, comme les coefficients ρ et μ sont constants à l'extérieur de Ω , on a :

$$\tilde{a}(\beta; u, u) \geq \beta^2 c_\infty^2 \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)}^2. \quad (5.16)$$

D'où enfin :

$$a(\beta; u, u) \geq \min(\lambda_1^N(\beta), \beta^2 c_\infty^2) \|u\|^2.$$

On en déduit que $\lambda_1(\beta) \geq \min(\lambda_1^N(\beta), \beta^2 c_\infty^2)$.

Considérons maintenant le cas $m > 1$ et soit V_{m-1} le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les $m - 1$ premières fonctions propres de $A_N(\beta)$, que nous avons notées $w_1^N(\beta), \dots, w_{m-1}^N(\beta)$. Alors, d'après les formules de min-max, on a :

$$\lambda_m(\beta) \geq \inf_{u \in X, u \neq 0} \frac{a(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \quad (5.17)$$

où $X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \int_{\Omega} u w_j^N dx = 0, j = 1, 2, \dots, m-1 \right\}$.

Or pour tout $u \in X$, on a :

$$a_N(\beta; u, u) \geq \lambda_m^N(\beta) \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\Omega)}$$

qui, joint à l'inégalité (5.16), donne :

$$a(\beta; u, u) \geq \min(\lambda_m^N(\beta), \beta^2 c_{\infty}^2) \|u\|^2.$$

Ceci achève la démonstration.

□

Chapitre 6

Calcul numérique des modes guidés d'un guide ouvert

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode numérique, appelée "méthode des Eléments Finis Localisés" permettant de calculer les modes guidés du guide ouvert modèle étudié au chapitre précédent. La difficulté tient au fait que le problème est initialement posé dans un domaine non borné. La première étape consiste donc à écrire un problème équivalent mais posé dans un domaine borné, et plus précisément ici dans un disque de rayon R à l'extérieur duquel les coefficients du modèle, ρ et μ , sont constants. Ceci est réalisé en utilisant une représentation en série de Fourier de la solution à l'extérieur du disque. Dans cette nouvelle formulation, il apparaît une non linéarité par rapport à l'inconnue ω^2 . Le problème est alors écrit sous la forme d'un problème de point fixe, ce qui permet d'établir un critère simple d'existence des solutions et fournit l'idée de l'algorithme numérique. On démontre des estimations d'erreur en fonction du paramètre h des éléments finis et du rang N de troncature de la série de Fourier. Enfin, quelques remarques relatives à l'implémentation sont développées en dernière partie.

6.1 Réduction à un domaine borné

Dans ce qui suit, β est un paramètre strictement positif donné et l'on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \omega^2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^+ \text{ tels que :} \\ -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u = \omega^2 \rho u \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ et } u \neq 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

On rappelle qu'il existe un réel R_0 tel que :

$$\rho(x) = \rho_\infty, \quad \mu(x) = \mu_\infty \quad \text{si } |x| \geq R_0.$$

On peut montrer, sous des hypothèses très faibles sur les coefficients ρ et μ , que

nécessairement, pour toute solution de (6.1) :

$$\beta^2 c_-^2 \leq \omega^2 \leq \beta^2 c_\infty^2 \quad \text{où} \quad c_\infty^2 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{et} \quad c_-^2 = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{\mu(x)}{\rho(x)}.$$

L'inégalité $\omega^2 \leq \beta^2 c_\infty^2$ traduit l'absence de valeurs propres "plongées" dans le spectre essentiel. Sa démonstration, très délicate, fait appel au théorème de Rellich (cf. [18]) et à un résultat de prolongement unique. L'inégalité $\omega^2 > \beta^2 c_-^2$ quant à elle a été établie au chapitre précédent.

Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, nous nous restreindrons aux solutions telles que :

$$\omega^2 < \beta^2 c_\infty^2,$$

c'est-à-dire aux valeurs propres situées strictement en dessous du spectre essentiel.

Soit R un réel strictement supérieur à R_0 et notons Ω_R le disque de centre O et de rayon R et Σ_R sa frontière. Par hypothèse, les coefficients de l'équation aux dérivées partielles, ρ et μ , sont constants au voisinage de Σ_R (cf. figure 6.1).

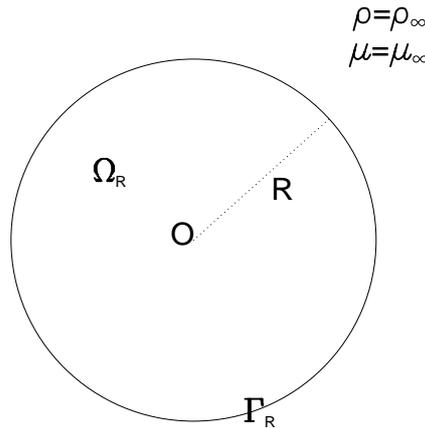


FIGURE 6.1 – Le domaine de calcul

Dans ce paragraphe, nous allons écrire un problème posé dans Ω_R et équivalent à (6.1). Introduisons tout d'abord quelques notations. Dans la suite, nous utiliserons les coordonnées polaires (r, θ) de sorte qu'un point situé sur le cercle Σ_R est donné par son angle polaire θ .

Pour tout réel s , l'espace de Sobolev usuel $H^s(\Sigma_R)$ peut être défini comme suit :

$$H^s(\Sigma_R) = \left\{ v = \sum_{p \in \mathbb{Z}} v_p e^{ip\theta}; \sum_{p \in \mathbb{Z}} |v_p|^2 (1 + |p|)^{2s} < +\infty \right\}$$

et muni de la norme ci-dessous, qui est équivalente à la norme usuelle :

$$\|v\|_{H^s(\Sigma_R)} = \left(2\pi R \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + |p|)^{2s} |v_p|^2 \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Le produit de dualité entre $H^s(\Sigma_R)$ et $H^{-s}(\Sigma_R)$ a l'expression suivante :

$$\langle u, v \rangle = 2\pi R \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_p \bar{v}_p \quad (6.3)$$

et $v_p = \langle v, \frac{1}{2\pi R} e^{ip\theta} \rangle$ est le p -ième coefficient de Fourier de v .

Pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et $u_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R)$, nous considérons le problème de Dirichlet suivant posé dans le domaine extérieur $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(\Omega_e) \text{ tel que} \\ -\Delta u + \left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{c_\infty^2} \right) u = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u|_\Sigma = u_0 & \text{sur } \Sigma_R \end{cases} \quad (6.4)$$

Proposition 6.1 *Pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et $u_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R)$, le problème (6.4) a une unique solution $u \in H^1(\Omega_e)$, qui a l'expression suivante :*

$$u(r, \theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{K_p \left(r \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)}{K_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)} (u_0)_p e^{ip\theta} \quad (6.5)$$

où K_p est la p -ième fonction de Bessel modifiée (cf. [1]). La série converge dans $H^1(\Omega_e)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout α dans $]\beta c_-, \beta c_\infty[$, le problème (6.4) a une unique solution u par le théorème de Lax-Milgram. De plus, il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega_e)} \leq C \|u_0\|_{H^{1/2}(\Sigma_R)}. \quad (6.6)$$

Posons $u_0^N = \sum_{|p| \leq N} (u_0)_p e^{ip\theta}$. Un calcul simple montre que la solution de (6.4) associée à la donnée de Dirichlet u_0^N est donnée par :

$$u^N = \sum_{|p| \leq N} (u_0)_p \frac{K_p \left(r \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)}{K_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)} e^{ip\theta}.$$

Comme u_0^N converge vers u_0 dans $H^{1/2}(\Sigma_R)$, (6.6) prouve que u^N converge vers u dans $H^1(\Omega_e)$. □

Remarque 6.1

– La fonction de Bessel modifiée K_p est telle que $K_p(\eta r)$ décroît exponentiellement quand $r \rightarrow +\infty$ comme $e^{-\eta r}$.

- On remarque que la solution u de (6.4) est C^∞ pour $r \geq R + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) et décroît exponentiellement avec r . Par conséquent, la série et toutes ses dérivées convergent uniformément pour $r \geq R + \varepsilon$.
- La fonction K_p est singulière en 0 et l'expression (6.5) n'est donc pas définie lorsque $\beta^2 = \alpha^2 c_\infty^{-2}$.

Introduisons maintenant l'opérateur de Calderon défini comme suit :

$$T_\alpha : \begin{cases} H^{1/2}(\Sigma_R) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Sigma_R) \\ u_0 & \longmapsto & \frac{\partial u}{\partial r} |_{\Sigma_R} \end{cases} \quad (6.7)$$

où u est la solution de (6.4) associée à la donnée de Dirichlet u_0 . Alors on a la

Proposition 6.2 *L'opérateur T_α a l'expression suivante :*

$$\forall u_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R), \forall \alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\\ T_\alpha u_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{K'_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)}{K_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)} (u_0)_p e^{ip\theta} \quad (6.8)$$

Il est continu de $H^{1/2}(\Sigma_R)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma_R)$ et la forme bilinéaire $\langle -T_\alpha u_0, v_0 \rangle$ est symétrique et positive sur $H^{1/2}(\Sigma_R)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $u_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R)$ et $v_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R)$, on a :

$$\langle T_\alpha u_0, v_0 \rangle = - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla v + (\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}) uv) dx$$

où u (resp. v) est la solution de (6.4) associée à la donnée u_0 (resp. v_0). Cette identité jointe à (6.6) prouve la continuité de T_α . La symétrie et la positivité sont évidentes. L'expression (6.8) résulte de la proposition 6.1. Il est clair que la série converge dans $H^{-1/2}(\Sigma_R)$. \square

Les résultats précédents nous conduisent à introduire le problème suivant posé dans le domaine borné Ω_R :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega_R), u \neq 0 \text{ et } \omega \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\text{ tels que :} \quad (6.9)$$

$$- \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \mu \beta^2 u = \omega^2 \rho u \text{ dans } \Omega_R, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = T_\omega(u |_{\Sigma_R}) \text{ sur } \Sigma_R. \quad (6.11)$$

Ce problème est équivalent à (6.1) dans le sens suivant :

Proposition 6.3 *Si (u, ω) est solution de (6.1), alors $(u|_{\Omega_R}, \omega)$ est solution de (6.9). Réciproquement, si (\tilde{u}, ω) est solution de (6.9), alors \tilde{u} peut être prolongée de manière unique en une solution u de (6.1) associée à la même valeur ω . De plus, ω est une solution de même multiplicité pour les deux problèmes, c'est-à-dire que l'espace des solutions u associé à une même valeur ω a la même dimension pour les deux problèmes.*

DÉMONSTRATION. Soit (u, ω) une solution de (6.1). Alors sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$ est la solution de (6.4) pour la donnée de Dirichlet $u|_{\Sigma_R}$ et $\alpha = \omega$. Par conséquent, u a la représentation (6.5) (avec $\alpha = \omega$) et vérifie (6.11). Réciproquement, si (\tilde{u}, ω) est solution de (6.9), posons :

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{si } r \leq R \\ \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{K_p \left(r \sqrt{\beta^2 - \omega^2 c_\infty^{-2}} \right)}{K_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \omega^2 c_\infty^{-2}} \right)} \tilde{u}_p(R) e^{ip\theta} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

pour $x = (r, \theta)$. Alors $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et satisfait (6.10) dans Ω_R et dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$. La continuité de la dérivée normale à travers Σ_R résulte de (6.11). Pour montrer que la multiplicité de ω est la même pour les deux problèmes, il suffit de remarquer qu'une solution u de (6.1) ne peut pas être identiquement nulle dans Ω_R . Aussi, si deux fonctions propres u_1 et u_2 associées à une même valeur propre de (6.1) sont linéairement indépendantes, leurs restrictions à Ω_R le sont aussi. La réciproque est évidente. \square

Remarque 6.2

- On remarque que, alors que le problème initial (6.1) était linéaire par rapport à la valeurs propre ω^2 , le problème en domaine borné (6.9) est non-linéaire puisque T_ω dépend non-linéairement de ω^2 .
- La condition aux limites (6.11) n'est pas différentielle. Elle est dite "non-locale" car elle relie la valeur de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ en un point de Σ_R aux valeurs de u en tout point de Σ_R .
- Le paramètre β étant supposé donné au départ, nous n'indiquons pas dans la notation T_ω la dépendance de cet opérateur par rapport à β . Remarquons cependant que le problème (6.9) est également non-linéaire par rapport à la quantité β^2 , alors que le problème (6.1) ne l'était pas. Autrement dit, cette difficulté serait apparue de la même manière si l'on avait décidé de considérer β comme inconnue et ω comme donnée.

Numériquement, nous sommes conduits à tronquer la série de Fourier. C'est pourquoi nous introduisons le problème, dit semi-discrétisé, suivant :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega_R), u \neq 0 \text{ et } \omega \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\text{ satisfaisant (6.10) et} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = T_\omega^N u \quad \text{sur } \Sigma_R, \quad (6.13)$$

où l'opérateur T_α^N est défini par :

$$T_\alpha^N u_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \sum_{|p| \leq N} \frac{K'_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)}{K_p \left(R \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 c_\infty^{-2}} \right)} (u_0)_p e^{ip\theta} \quad (6.14)$$

pour tout $u_0 \in H^{1/2}(\Sigma_R)$, $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$.

Tout comme le problème en domaine borné (6.9), le problème semi-discrétisé (6.12) est non-linéaire.

6.2 Etude de la non-linéarité

Définissons pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ les deux problèmes linéaires de valeurs propres suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u \in H^1(\Omega_R), u \neq 0, \\ \text{satisfaisant les équations (6.10) et (6.16)} \end{cases} \quad (6.15)$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial n} = T_\alpha u \quad \text{sur } \Sigma_R \quad (6.16)$$

et :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u \in H^1(\Omega_R), u \neq 0, \\ \text{satisfaisant les équations (6.10) et (6.18)} \end{cases} \quad (6.17)$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial n} = T_\alpha^N u \quad \text{sur } \Sigma_R. \quad (6.18)$$

Ces deux problèmes sont linéaires au sens où la valeur propre ω^2 y apparaît de façon linéaire. En effet, la condition aux limites sur Σ ne dépend plus de ω mais d'un paramètre α donné.

Il est clair que (u, ω) est solution de (6.9) (resp. (6.12)) si et seulement si (u, ω) est solution de (6.15) (resp. (6.17)) avec $\alpha = \omega$.

L'existence des solutions de (6.15) et (6.17) est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 6.4 *Soit $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$. Les valeurs propres ω^2 du problème (6.15) (resp. (6.17)) sont supérieures à $\beta^2 c_-^2$, dénombrables, ont une multiplicité finie et peuvent être ordonnées en une suite croissante tendant vers $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément que (6.19) est une formulation variationnelle de (6.15) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_R) \text{ et } \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que} \\ \forall v \in H^1(\Omega_R), a_R(\alpha; u, v) = \omega^2 \int_{\Omega_R} \rho u v dx \end{cases} \quad (6.19)$$

où la forme bilinéaire $a_R(\alpha; \cdot, \cdot)$ est définie comme suit :

$$\forall (u, v) \in (H^1(\Omega_R))^2, a_R(\alpha; u, v) = \int_{\Omega_R} \mu [\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 u v] dx - \mu_\infty \langle T_\alpha u|_{\Sigma_R}, v|_{\Sigma_R} \rangle.$$

D'après (6.14), on a donc :

$$a_R(\alpha; u, v) = \int_{\Omega_R} \mu [\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 u v] dx + 2\pi\mu_\infty \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha^2} \right) u_p \bar{v}_p \quad (6.20)$$

où

$$\Phi_p(z) = -z \frac{K'_p(z)}{K_p(z)}. \quad (6.21)$$

La fonction $\Phi_p(z)$ est positive sur \mathbb{R}_+^* (car la fonction de Bessel K_p est positive et décroissante) et par conséquent la forme bilinéaire $a_R(\alpha; \cdot, \cdot)$ est telle que :

$$a_R(\alpha; u, u) \geq \int_{\Omega_R} \mu |\nabla u|^2 dx + \beta^2 c_-^2 \int_{\Omega_R} \rho u^2 dx. \quad (6.22)$$

Elle est donc coercive sur $H^1(\Omega_R)$. Comme Ω_R est borné, il en résulte que l'opérateur non borné de $L^2(\Omega_R)$, $A_R(\alpha)$, associé à $a_R(\alpha; \cdot, \cdot)$ est à résolvante compacte et borné inférieurement par $\beta^2 c_-^2$. Son spectre est donc purement ponctuel constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers $+\infty$. Pour conclure, il suffit de vérifier que $\beta^2 c_-^2$ ne peut être valeur propre : si tel était le cas, la fonction propre associée u serait telle que $\nabla u = 0$ sur Ω_R et $u_p = 0$ pour tout p , d'où $u = 0$ sur Σ_R . Elle serait donc identiquement nulle. La démonstration est exactement la même pour le problème semi-discrétisé (6.17). \square

La proposition (6.4) permet de définir une famille $(\Lambda_m)_{m \geq 1}$ de fonctions de $] \beta c_-, \beta c_\infty[$ dans \mathbb{R}_+ , telles que $\Lambda_m(\alpha)$ soit la m -ième valeur propre de l'opérateur $A_R(\alpha)$ associé à la forme $a_R(\alpha; \cdot, \cdot)$.

Pour tout $v \in H^1(\Omega_R)$, on pose

$$\mathcal{R}(\alpha, v) = \frac{\int_{\Omega_R} \mu [|\nabla v|^2 + \beta^2 v^2] dx + 2\pi \mu_\infty \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha^2} \right) |v_p|^2}{\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx}. \quad (6.23)$$

On obtient une écriture explicite de $\Lambda_m(\alpha)$ en utilisant les formules de Min-Max :

$$\Lambda_m(\alpha) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m} \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}(\alpha, v) \quad (6.24)$$

où \mathcal{V}_m est l'ensemble des sous-espaces de $H^1(\Omega_R)$, de dimension m . De même, on a les expressions suivantes pour les valeurs propres $\Lambda_m^N(\alpha)$ du problème semi-discrétisé :

$$\Lambda_m^N(\alpha) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m} \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}^N(\alpha, v) \quad (6.25)$$

où :

$$\mathcal{R}^N(\alpha, v) = \frac{\int_{\Omega_R} \mu [|\nabla v|^2 + \beta^2 v^2] dx + 2\pi \mu_\infty \sum_{|p| \leq N} \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha^2} \right) |v_p|^2}{\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx}. \quad (6.26)$$

Les solutions du problème non-linéaire (6.9) sont donc les racines de chacune des équations suivantes :

$$\omega \in] \beta c_-, \beta c_\infty[\text{ et } \Lambda_m(\omega) = \omega^2 \quad (6.27)$$

pour $m \geq 1$. De même, les solutions du problème non-linéaire semi-discrétisé (6.12) sont les racines de chacune des équations suivantes :

$$\omega \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\text{ et } \Lambda_m^N(\omega) = \omega^2 \quad (6.28)$$

pour $m \geq 1$.

Proposition 6.5 *Les fonctions $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m(\alpha)$ (resp. $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m^N(\alpha)$) sont continues et décroissantes sur $]\beta^2 c_-^2, \beta^2 c_\infty^2[$ et admettent une limite finie en $\beta^2 c_\infty^2$. Par conséquent, l'équation (6.27) (resp. 6.28) n'a pas de solution si $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m(\alpha) \geq \beta^2 c_\infty^2$ (resp. $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^N(\alpha) \geq \beta^2 c_\infty^2$) et exactement une solution ω_m (resp. ω_m^N) sinon.*

Ce résultat est illustré sur la figure 6.2.

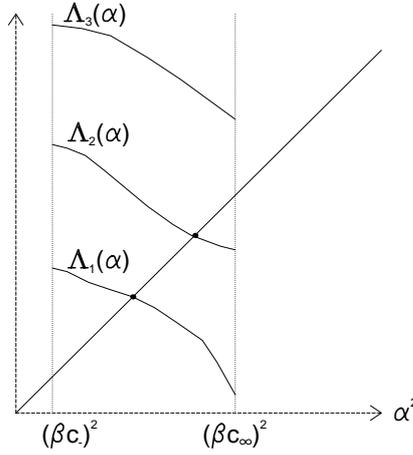


FIGURE 6.2 – Illustration de la proposition 6.5

DÉMONSTRATION. D'après [15], on peut vérifier à l'aide des propriétés classiques des fonctions de Bessel que :

$$\forall z \geq 0, \quad 0 < \Phi_p'(z) \leq 2. \quad (6.29)$$

La monotonie de Λ_m et Λ_m^N est alors évidente. Pour prouver la continuité, on considère α_1 et α_2 dans $]\beta c_-, \beta c_\infty[$. Pour tout $v \in H^1(\Omega_R)$ tel que $\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx = 1$, on a :

$$|\mathcal{R}(\alpha_1, v) - \mathcal{R}(\alpha_2, v)| \leq 2\pi\mu_\infty \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_1^2} \right) - \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_2^2} \right) \right| |v_p|^2.$$

Par conséquent, d'après (6.29) :

$$|\mathcal{R}(\alpha_1, v) - \mathcal{R}(\alpha_2, v)| \leq 4\pi R \mu_\infty \left(\sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_1^2} - \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_2^2} \right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} |v_p|^2.$$

On en déduit l'estimation suivante :

$$|\mathcal{R}(\alpha_1, v) - \mathcal{R}(\alpha_2, v)| \leq 4\pi R C |\alpha_1 - \alpha_2| \|v|_\Sigma\|_{L^2(\Sigma_R)}^2 \quad (6.30)$$

où la constante C est définie par :

$$C = \frac{\mu_\infty}{2 \min \left(\sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_1^2}, \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha_2^2} \right)}.$$

De plus, d'après la coercivité de $a_R(\alpha; \cdot, \cdot)$ dans $H^1(\Omega_R)$ et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega_R)$ sur $L^2(\Sigma_R)$, il existe une constante C' indépendante de v telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_R)}^2 \leq C' a(\alpha_1, v, v).$$

De cette inégalité et de (6.30), on déduit :

$$\mathcal{R}(\alpha_2, v) \leq \mathcal{R}(\alpha_1, v) + 4\pi R C C' \mathcal{R}(\alpha_1, v) |\alpha_1 - \alpha_2|$$

qui donne :

$$\Lambda_m(\alpha_2) \leq \Lambda_m(\alpha_1) + 4\pi R C C' \Lambda_m(\alpha_1) |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

En échangeant les rôles de α_1 et α_2 , on obtient finalement :

$$|\Lambda_m(\alpha_2) - \Lambda_m(\alpha_1)| \leq 4\pi R C C' \max(\Lambda_m(\alpha_1), \Lambda_m(\alpha_2)) |\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (6.31)$$

Ceci prouve que la fonction Λ_m est lipschitzienne sur $]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et a fortiori continue. La démonstration est la même pour Λ_m^N . □

6.3 Estimations d'erreur pour le problème semi-discrétisé

Nous allons maintenant étudier l'erreur due à la troncature de la série. Autrement dit, nous allons donner une estimation de l'écart $|\Lambda_m(\alpha) - \Lambda_m^N(\alpha)|$ et montrer que celui-ci tend très rapidement vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Tout d'abord, nous établissons un résultat de convergence uniforme pour la suite \mathcal{R}^N .

Proposition 6.6 *Pour tout $s > 0$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de N telle que pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et toute fonction $v \in H^1(\Omega_R)$ telle que $v|_{\Sigma_R} \in H^s(\Sigma_R)$ et $\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx = 1$, on ait :*

$$0 \leq \mathcal{R}(\alpha, v) - \mathcal{R}^N(\alpha, v) \leq \frac{C}{N^{2s-1}} \|v\|_{H^s(\Sigma_R)}^2. \quad (6.32)$$

DÉMONSTRATION. En soustrayant (6.23) de (6.26) on obtient :

$$\mathcal{R}(\alpha, v) - \mathcal{R}^N(\alpha, v) = 2\pi\mu_\infty \sum_{|p|>N} \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha^2} \right) |v_p|^2. \quad (6.33)$$

Comme les fonctions Φ_p sont positives, il en résulte que :

$$\mathcal{R}(\alpha, v) - \mathcal{R}^N(\alpha, v) \geq 0. \quad (6.34)$$

De plus on sait d'après (6.29) que :

$$\left| \Phi_p \left(R \sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2} \alpha^2} \right) \right| \leq |p| + 2RV_\infty \quad \text{où } V_\infty = \beta \sqrt{1 - \frac{c_-^2}{c_\infty^2}}. \quad (6.35)$$

De (6.33) et (6.35), on déduit :

$$\mathcal{R}(\alpha, v) - \mathcal{R}^N(\alpha, v) \leq 2\pi\mu_\infty \max(2RV_\infty, 1) \sum_{|p|>N} (1 + |p|) |v_p|^2. \quad (6.36)$$

De plus, pour tout p tel que $|p| > N$, on a :

$$(1 + |p|) \leq \frac{(1 + |p|)^{2s}}{N^{2s-1}}.$$

Par conséquent, en utilisant (6.2), (6.36) et l'inégalité précédente, on obtient finalement :

$$\mathcal{R}(\alpha, v) - \mathcal{R}^N(\alpha, v) \leq \frac{C}{N^{2s-1}} \|v\|_{H^s(\Sigma_R)}^2. \quad (6.37)$$

□

Notons $(u_j^N(\alpha))_j$ une famille de fonctions propres associées aux valeurs propres $(\Lambda_j^N(\alpha))_j$ du problème linéaire semidiscretisé (6.17) et formant une base de $L^2(\Omega_R)$.

Proposition 6.7 *Pour tout $s > 0$, les fonctions $u_j^N(\alpha)$ sont telles que $u_j^N(\alpha)|_{\Sigma_R} \in H^s(\Sigma_R)$ et il existe une constante positive C indépendante de N et de α telle que :*

$$0 \leq \Lambda_m(\alpha) - \Lambda_m^N(\alpha) \leq \frac{C}{N^{2s-1}} \max_{j=1,2,\dots,m} \frac{\|u_j^N(\alpha)\|_{H^s(\Sigma_R)}^2}{\int_{\Omega_R} \rho u_j^N(\alpha)^2 dx}. \quad (6.38)$$

DÉMONSTRATION. Les fonctions $u_j^N(\alpha)$ sont \mathcal{C}^∞ au voisinage de Σ_R d'après les résultats standards de régularité pour les opérateurs elliptiques. En effet, au voisinage de Σ_R , $u_j^N(\alpha)$ est solution de l'équation à coefficients constants :

$$\Delta u + (\beta^2 - c_\infty^{-2} \Lambda_j^N(\alpha)) u = 0.$$

De plus, sur la frontière Σ_R , on a :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u = T_\alpha^N u$$

et il est clair que la fonction $T_\alpha^N u$ est \mathcal{C}^∞ car c'est une somme finie de fonctions \mathcal{C}^∞ .

Notons en revanche que, comme la fonction μ est seulement supposée L^∞ , les fonctions $u_j^N(\alpha)$ peuvent ne pas appartenir à $H^2(\Omega_R)$.

D'après (6.24), (6.25) et (6.34), on a :

$$\Lambda_m(\alpha) \geq \Lambda_m^N(\alpha) \quad (6.39)$$

De plus, d'après (6.32), pour toute fonction $v \in H^1(\Omega_R)$ telle que $v|_{\Sigma_R} \in H^s(\Sigma_R)$, on a :

$$\mathcal{R}(v, \alpha) \leq \mathcal{R}^N(v, \alpha) + \frac{C}{N^{2s-1}} \frac{\|v\|_{H^s(\Sigma_R)}^2}{\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx}. \quad (6.40)$$

Soit V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $u_j^N(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

On a :

$$\Lambda_m^N(\alpha) = \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}^N(v, \alpha) \quad (6.41)$$

et

$$\Lambda_m(\alpha) \leq \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}(v, \alpha). \quad (6.42)$$

De (6.40), (6.42) et (6.41), on déduit :

$$\Lambda_m(\alpha) \leq \Lambda_m^N(\alpha) + \frac{C}{N^{2s-1}} \max_{v \in V_m, v \neq 0} \frac{\|v\|_{H^s(\Sigma_R)}^2}{\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx}. \quad (6.43)$$

Or pour tout $v \in V_m$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, tel que $v = \sum_{j=1}^m \gamma_j u_j^N(\alpha)$ et l'on a :

$$\int_{\Omega_R} \rho v^2 dx = \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \int_{\Omega_R} \rho (u_j^N(\alpha))^2 dx \quad (6.44)$$

et

$$\|v\|_{H^s(\Sigma_R)}^2 \leq 2 \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \|u_j^N(\alpha)\|_{H^s(\Sigma_R)}^2. \quad (6.45)$$

Le résultat s'en déduit. □

Afin d'établir le principal résultat de ce paragraphe, nous admettrons l'estimation suivante dont la démonstration est très technique (cf. [6]) :

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante positive C telle que, pour tout $j = 1, 2, \dots$ et $N \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\|u_j^N(\alpha)|_{\Sigma_R}\|_{H^s(\Sigma_R)} \leq C \|u_j^N(\alpha)\|_{L^2(\Omega_R)}.$$

De cette estimation et de la proposition précédente, on déduit enfin le

Théorème 6.1 *Pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et tout $s > 0$, il existe une constante positive C , indépendante de N et de α (mais qui dépend de ρ , μ , m and s), telle que :*

$$0 \leq \Lambda_m(\alpha) - \Lambda_m^N(\alpha) \leq \frac{C}{N^{2s}}.$$

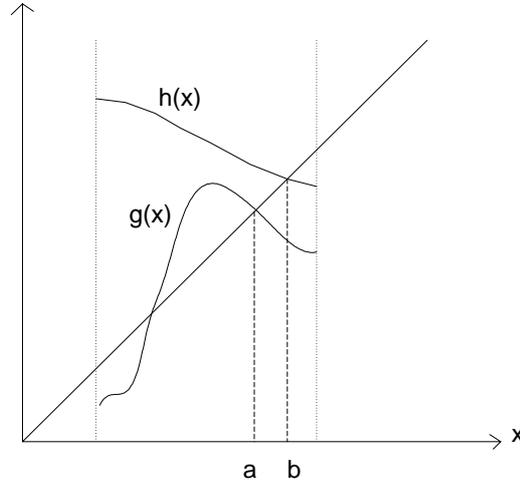


FIGURE 6.3 – Illustration du lemme 6.1

Autrement dit, l'erreur décroît plus vite que toute puissance de $\frac{1}{N}$. Il est probable que cette décroissance soit exponentielle mais on ne sait pas le montrer.

Nous allons maintenant donner une estimation de l'erreur commise sur les solutions du problème initial (6.1) ou (6.9) (on rappelle qu'ils sont équivalents) lorsque l'on tronque la série.

Théorème 6.2 *Supposons que $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$. Alors $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^N(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$ et pour tout $s \geq 0$, il existe une constante positive $C = C(s, m, \rho, \mu)$ telle que pour tout $N \geq 0$, on ait :*

$$0 \leq \omega_m^2 - (\omega_m^N)^2 \leq \frac{C}{N^{2s}}$$

où ω_m (resp. ω_m^N) est la solution de l'équation (6.27) (resp. (6.28)).

La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 6.1 *Soient g et h deux fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$ et que h est décroissante sur I . S'il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $g(a) = a$ et $h(b) = b$, alors $a \leq b$.*

Cette situation est illustrée sur la figure 6.3.

DÉMONSTRATION. Si on suppose que $a > b$, on obtient :

$$h(a) \leq h(b) = b.$$

Par ailleurs,

$$g(a) = a \leq h(a).$$

De ces deux inégalités, on déduit que $a \leq b$ d'où la contradiction.

□

Lemme 6.2 *Si les hypothèses du lemme 6.1 sont satisfaites et que de plus :*

$$\forall x \in I, 0 \leq h(x) - g(x) \leq \varepsilon, \quad (6.46)$$

alors :

$$0 \leq b - a \leq \varepsilon. \quad (6.47)$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme précédent, on a $a \leq b$. De plus :

$$b - a \leq (h(b) - h(a)) + (h(a) - g(a)).$$

Le résultat s'en déduit car $h(b) - h(a) \leq 0$ et $h(a) - g(a) < \varepsilon$. □

On peut maintenant achever la démonstration du théorème 6.2 :

DÉMONSTRATION. Les valeurs ω_m^2 et $(\omega_m^N)^2$ sont les points fixes des fonctions $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m(\alpha)$ et $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m^N(\alpha)$, dans l'intervalle $]\beta^2 c_-^2, \beta^2 c_\infty^2[$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, ces fonctions sont décroissantes. De plus, pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$, on a d'après le théorème 6.1 :

$$0 \leq \Lambda_m(\alpha) - \Lambda_m^N(\alpha) \leq \frac{C}{N^{2s}}.$$

Le résultat s'en déduit grâce aux lemmes 6.1 et 6.2. □

6.4 Discrétisation par éléments finis

On souhaite maintenant résoudre le problème initial par une méthode d'éléments finis. Supposons que l'on ait réalisé un maillage à l'aide d'éléments finis standards P_1 du domaine Ω_R et notons V_h l'espace engendré par les fonctions de base associées. C'est un espace de dimension finie n_h inclus dans $H^1(\Omega_R)$.

Pour $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$, on considère alors les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \text{ et } \omega \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \forall v \in V_h \ a_R(\alpha; u, v) = \omega^2 \int_{\Omega_R} \rho u v dx \end{cases} \quad (6.48)$$

où

$$a_R(\alpha, u, v) = \int_{\Omega_R} \mu [\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv] dx + 2\pi\mu_\infty \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p \left(R\sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2}\alpha^2} \right) u_p \bar{v}_p,$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \text{ et } \omega \in]\beta c_-, \beta c_\infty[\in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \forall v \in V_h \ a_R^N(\alpha, u, v) = \omega^2 \int_{\Omega_R} \rho u v dx \end{cases} \quad (6.49)$$

où

$$a_R^N(\alpha; u, v) = \int_{\Omega_R} \mu [\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv] dx + 2\pi\mu_\infty \sum_{|p| \leq N} \Phi_p \left(R\sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2}\alpha^2} \right) u_p \bar{v}_p.$$

On note $(\Lambda_m^h(\alpha))$ (resp. $(\Lambda_m^{N,h}(\alpha))$) pour $m = 1, 2, \dots, n_h$ les solutions de (6.48) (resp. (6.49)). Elles sont caractérisées par les formules suivantes

$$\Lambda_m^h(\alpha) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_{m,h}} \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}(\alpha, v) \quad (6.50)$$

et

$$\Lambda_m^{N,h}(\alpha) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_{m,h}} \max_{v \in V_m, v \neq 0} \mathcal{R}^N(\alpha, v) \quad (6.51)$$

où $\mathcal{V}_{m,h}$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension m de V_h . On a directement l'analogie de la proposition 6.5 :

Proposition 6.8 *Les fonctions $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m^h(\alpha)$ (resp. $\alpha^2 \rightarrow \Lambda_m^{N,h}(\alpha)$) sont continues et décroissantes sur $]\beta^2 c_-^2, \beta^2 c_\infty^2[$ et admettent une limite finie en $\beta^2 c_\infty^2$. Par conséquent, l'équation*

$$\Lambda_m^h(\alpha) = \alpha^2 \quad (6.52)$$

et l'équation

$$\Lambda_m^{N,h}(\alpha) = \alpha^2 \quad (6.53)$$

respectivement n'ont pas de solution si $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^h(\alpha) \geq \beta^2 c_\infty^2$ (resp. $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^{N,h}(\alpha) \geq \beta^2 c_\infty^2$) et exactement une solution ω_m^h (resp. $\omega_m^{N,h}$) sinon.

Les quantités $\omega_m^{N,h}$ sont celles que l'on peut calculer en pratique. C'est donc l'écart entre ces valeurs et les valeurs exactes que l'on aimerait estimer a priori.

Comme $V_h \subset H^1(\Omega)$, on déduit aisément des formules de Min-Max les inégalités suivantes :

$$\omega_m \leq \omega_m^h \quad \text{et} \quad \omega_m^N \leq \omega_m^{N,h} \quad (6.54)$$

pour tout $m = 1, 2, \dots, n_h$. Par ailleurs, on a vu que pour tout m :

$$\omega_m^N \leq \omega_m.$$

De la même manière, on vérifie aisément que :

$$\omega_m^{N,h} \leq \omega_m^h.$$

De ces quatre inégalités, il résulte que :

$$\begin{cases} \omega_m^N \leq \omega_m \leq \omega_m^h \\ \omega_m^N \leq \omega_m^{N,h} \leq \omega_m^h \end{cases}$$

Par conséquent :

$$|\omega_m - \omega_m^{N,h}| \leq |\omega_m^h - \omega_m^N| = |\omega_m - \omega_m^N| + |\omega_m^h - \omega_m|.$$

L'estimation de $|\omega_m - \omega_m^N|$ a été établie au paragraphe précédent. Il nous suffit donc maintenant d'estimer l'erreur $|\omega_m^h - \omega_m|$ due à la discrétisation par éléments finis lorsque la série n'est pas tronquée. Or les résultats classiques sur l'approximation des valeurs propres (cf. [16]) nous permettent d'énoncer le

Lemme 6.3 *Il existe une constante C indépendante de h et de α telle que, pour tout $\alpha \in]\beta c_-, \beta c_\infty[$ et $m = 1, 2, \dots, n_h$:*

$$0 \leq \Lambda_m^h(\alpha) - \Lambda_m(\alpha) \leq Ch^2.$$

Tout comme dans le paragraphe précédent, on en déduit le

Lemme 6.4 *Si $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$, alors pour h assez petit $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^h(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$ et il existe une constante C indépendante de h telle que, pour $m = 1, 2, \dots, n_h$:*

$$0 \leq \omega_m^h - \omega_m \leq Ch^2.$$

On obtient donc enfin le

Théorème 6.3 *Si $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$, alors pour h assez petit $\lim_{\alpha \rightarrow \beta c_\infty} \Lambda_m^{N,h}(\alpha) < \beta^2 c_\infty^2$ et, pour tout $s \geq 0$, il existe une constante C dépendant de s mais indépendante de h et de N telle que, pour $m = 1, 2, \dots, n_h$:*

$$|\omega_m - \omega_m^{N,h}| \leq C \left(\frac{1}{N^s} + h^2 \right).$$

6.5 Mise en oeuvre

La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis localisés pour ce problème présente deux aspects essentiels : le caractère non-local de la condition aux limites et la non-linéarité.

Le premier aspect se traduit par un remplissage partiel de la matrice. En effet, si l'on note w_i la fonction de base éléments finis associée au i -ème degré de liberté, le terme \mathbf{A}_{ij} de la matrice a pour expression :

$$\mathbf{A}_{ij} = a_R(\alpha; w_i, w_j).$$

Ainsi, si les degrés i et j , sont situés sur Σ_R , et même s'il n'appartiennent pas à un même élément, \mathbf{A}_{ij} est non nul car on a :

$$\mathbf{A}_{ij} = 2\pi\mu_\infty \sum_{|p| \leq N} \Phi_p \left(R\sqrt{\beta^2 - c_\infty^{-2}\alpha^2} \right) (w_i)_p (\bar{w}_j)_p.$$

L'aspect non-linéaire du problème à résoudre conduit à implémenter un algorithme itératif comportant deux boucles imbriquées. La boucle externe correspond à un algorithme de type point-fixe (ou sécante, Newton, Illinois etc..) destiné à résoudre l'équation non-linéaire :

$$\Lambda_m^{N,h}(\alpha) = \alpha^2$$

dans l'intervalle $]\beta_{c-}, \beta_{c\infty}[$. A chaque itération de cet algorithme, on est amené à évaluer la fonction $\Lambda_m^{N,h}$ en une nouvelle valeur α . Or, comme $\Lambda_m^{N,h}(\alpha)$ a été défini comme valeur propre d'un problème discret, ceci revient à calculer la m -ième valeur propre λ d'un problème de la forme :

$$\mathbf{A}X = \lambda\mathbf{M}X$$

où \mathbf{A} et \mathbf{M} sont des matrices symétriques. On utilise pour cela l'un des algorithmes itératifs classiques (puissance inverse, sous-espaces, Lanczos, QR etc..) (cf. [14]).

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, INC., New-York, 1972.
- [2] J.D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] B.A. Auld. *Acoustic fields and elastic waves in solids*. Wiley Interscience, 1973.
- [4] A. Bamberger and A.S. Bonnet. Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :1487–1510, 1990.
- [5] A. Bamberger, P. Joly, and M. Kern. Propagation of elastic waves along a cylindrical cavity of arbitrary cross section. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25 :1–30, 1991.
- [6] A.S. Bonnet-BenDhia and N. Gmati. Spectral approximation of a boundary condition for an eigenvalue problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32 :1263–1279, 1995.
- [7] A.S. Bonnet-BenDhia and P. Joly. Mathematical analysis of guided water waves. Rapport interne, INRIA, Rocquencourt, France, 1992.
- [8] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [9] R. Feynman. *Le cours de physique de Feynman*. InterEditions, Paris, 1979.
- [10] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, 1976.
- [11] D. Marcuse. *Theory of dielectric optical waveguide*. Academic Press, New-York, 1974.
- [12] D. Marcuse. *Light Transmission Optics*. Van Nostrand-Reinhold, 1982.
- [13] J. Miklowitz. *The theory of elastic waves and waveguides*. North Holland, 1978.
- [14] B. N. Parlett. *The symmetric eigenvalue problem*. Prentice Hall Series in Computational Mathematics. Prentice-Hall, 1980.
- [15] H. Picq. *Détermination et calcul numérique de la première valeur propre d'opérateurs de Schrödinger dans le plan*. PhD thesis, Université de Nice, 1982.
- [16] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [17] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Physics, Analysis of Operators*, volume 4. Academic Press, 1980.

- [18] F. Rellich. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Über. Deutsch. Math. Verein*, 53 :57–65, 1943.
- [19] M. Schechter. *Operator Methods in Quantum Mechanics*. North Holland, 1981.
- [20] B. Simon. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Annals of Physics*, 97 :279–288, 1976.
- [21] A.W. Snyder and J.D. Love. *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall, London, 1983.
- [22] J.J. Stoker. *Water waves. The mathematical theory with applications*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [23] C. Vassalo. *Optical Waveguide Concepts*. Elsevier, 1991.
- [24] H.D. Witsch. Examples of embedded eigenvalues for the Dirichlet Laplacian in perturbed waveguides. *Math. Meth. in Appl. Sci.*, 12 :91–93, 1990.