

Les Théorèmes de base [Retour](#)

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

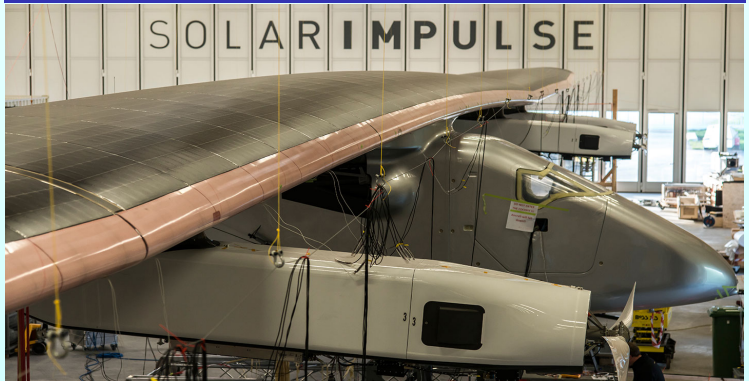
Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1



Cours 1: Les outils



Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

PLAN DU COURS 1

- 1 Le théorème spectral
 - Version forte
 - La forme variationnelle de base
 - Usage classique (mêmes notations)
 - Usage étendu
- 2 Quelques exemples simples (très)
 - Cas de la corde et de la poutre
- 3 La sous-structuration dynamique (SSD)
 - Craig-Bampton, McNeal, Gladwell
 - SSD augmentée Steklov et capillarité
- 4 L'effet Doppler
 - Un exemple d'application envisageable
- 5 Un petit exercice
- 6 QCM 1

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Les hypothèses *soft*

On note H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire :

$$(\cdot, \cdot)_H$$

et de la norme associée :

$$\|\cdot\|_H.$$

Soit T un opérateur linéaire symétrique (normal au minimum) et compact (continu) de H dans lui même.

Le résultat

- Il existe une suite dénombrable de vecteurs propres $\{w_n\}$ et de valeurs propres μ_n , telles que : $\|w_n\|_H = 1$ et :

$$Tw_n = \mu_n w_n, \quad \mu_n \in \mathbb{R}, \quad w_n \in H;$$

- 0 est le seul point d'accumulation de la suite μ_n , et il l'est si $\dim(H) = \infty$;
- la famille $\{w_n\}$ est une base Hilbertienne de H ;
- la dimension du s.e.v. propre associé à une valeur propre $\neq 0$ est finie ;
- dans la base $\{w_n\}$ l'opérateur T est diagonal ;

La forme variationnelle de base Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Le cadre usuel

- On considère deux espaces de Hilbert séparables : V et H .
- De plus on suppose que $V \subset H$ avec injection compacte.
- Soient $m(.,.)$ et $a(.,.)$ deux formes bilinéaires symétriques définies et continues respectivement sur H et V t.q. :

$$\exists c_0 > 0, \forall v \in H, m(v, v) \geq c_0 \|v\|_H^2$$

$$\exists c_1 > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq c_1 \|v\|_V^2$$

- on peut munir H du p.s. $m(.,.)$
- et idem V du p.s. $a(.,.)$.

Le Théorème variationnel Preuve

- $\exists \{w_n, \lambda_n\} \in V \times \mathbb{R}^{+*}$ t.q. :

$$\forall v \in V, a(w_n, v) = \lambda_n m(w_n, v)$$

- $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H ;
- la suite λ_n ne peut admettre que l'infini comme point d'accumulation ;
- la dimension des sous-espaces propres associés à λ_n est finie ;
- $\left\{ \frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ est une base hilbertienne de V .

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Le problème modèle des ondes

On souhaite résoudre : trouver $u(x, t)$, $x \in \Omega$ (borné), $t > 0$ t.q. :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \in V, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \in H, \quad x \in \Omega \\ \forall v \in V, \quad m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + a(u, v) &= l(v), \quad l(\cdot), \quad u_0, u_1 \text{ données.} \end{aligned}$$

Le résultat version standard

$\exists ! u \in \mathcal{C}^0([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H)$ avec $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) w_n(x)$ et :

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= (u_0, w_n)_H \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{(u_1, w_n)_H}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t l(w_n)(s) \sin(\sqrt{\lambda_n}(t-s)) ds. \end{aligned}$$

Si $l(v) = F(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) v$ on a une résonance qui est une croissance linéaire versus le temps t .

[Réson](#)[Battements](#)[Matlab](#)

Usage étendu (mêmes notations) [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Modèle avec couplage gyroscopique et amortissement

On souhaite résoudre : trouver $u(x, t)$, $x \in \Omega, t > 0$ t.q. :

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x) \in V, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \in H, \quad x \in \Omega \\ \forall v \in V, \quad m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u, v) = l(v). \end{aligned}$$

où $c(., .)$ est une forme bilinéaire continue sur V vérifiant :

$$\forall v \in V, \quad c(v, v) \geq 0.$$

Le résultat étendu (régularité en temps de l et en espace des $C.I.$)

$$\exists ! u \in L^\infty([0, T[; V) \cap W^{1, \infty}([0, T[; H) \text{ avec } u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) w_n(x).$$

On retrouve la régularité en temps en dérivant les équations en t .

Encore plus étendu [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Modèle avec amortissement et raideur négative

On note $V_p^c = \{v(x) = \sum_{n \geq p} \alpha_n w_n(x)\}$ et $V_p = \{v(x) = \sum_{1 \leq n < p} \alpha_n w_n(x)\}$.

On suppose maintenant que :

$$\begin{aligned} \exists c_1 > 0, \forall v \in V_p^c, a(v, v) &\geq c_1 \|v\|_V^2, \\ \forall v \in V_p^c, c(v, v) &\geq 0. \end{aligned}$$

Le résultat super étendu

On pose $u(x, t) = e^{\xi t} \underline{u}(x, t)$, $\xi > 0$. Le modèle devient :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, m\left(\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}, v\right) + c\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, v\right) + a(\underline{u}, v) \\ + 2\xi m\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, v\right) + \xi^2 m(\underline{u}, v) + \xi c(\underline{u}, v) = e^{-\xi t} l(v). \end{aligned}$$

On choisit ensuite ξ assez grand pour assurer la coercivité de $a(.,.) + \xi^2 m(.,.) + \xi c(.,.)$ sur V_p et la positivité de $c(v, v) + 2\xi m(v, v)$.

Et si $c(.,.) = 0$! ou si (Basile/Rayleigh) :

$c(.,.) = \xi_1 m(.,.) + \xi_2 a(.,.)$ [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Tout se découple (c'est aussi le cas avec Basile/Rayleigh)

On suppose toujours que :

$$\exists c_1 > 0, \forall v \in V_p^c, a(v, v) \geq \lambda_p \|v\|_V^2, \text{ et } \forall n \in \{1, p-1\}, \lambda_n \leq 0,$$

On a encore :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) w_n(x),$$

mais cette fois (on pose ici $l(.) = c(.,.) = 0$ pour simplifier) :

$$1 \leq n \leq p-1 :$$

$$\alpha_n(t) = (u_0 \cdot w_n)_H \cosh(\sqrt{-\lambda_n} t) + \frac{(u_1 \cdot w_n)_H}{\sqrt{-\lambda_n}} \sinh(\sqrt{-\lambda_n} t),$$

$$\forall n \geq p :$$

$$\alpha_n(t) = (u_0 \cdot w_n)_H \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{(u_1 \cdot w_n)_H}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t).$$

$$\text{Et si } \lambda_k = 0 :$$

$$\alpha_k(t) = (u_0 \cdot w_k)_H + t(u_1 \cdot w_k)_H.$$

Un premier exemple Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Cas de la corde-fouet

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= 0, \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = T_r, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).\end{aligned}$$

On peut exprimer la solution u à l'aide des modes propres (w_n, λ_n) :

$$\begin{aligned}\lambda_n w_n &= -c^2 \frac{d^2 w_n}{dx^2}, \quad 0 < x < L, \quad \|w_n\|_{0,[0,L]} = 1, \\ w_n(0) &= c^2 \frac{dw_n}{dx}(L) = 0\end{aligned}$$

un simple calcul donne :

$$w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le paradoxe Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

La *turpitude* du phénomène de Gibbs

Chaque mode vérifie une condition de Neumann homogène en $x = L$ et pourtant la solution u est telle que $c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = Tr!$

En fait, la convergence de la série n'a pas lieu dans $\mathcal{C}^1([0, L])$, mais seulement dans l'espace dans $H^1(]0, L[) \subset \mathcal{C}^0([0, L])$.

Construisons les sommes de Fourier partielles

Considérons l'exemple statique élémentaire :

$$-c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < L,$$

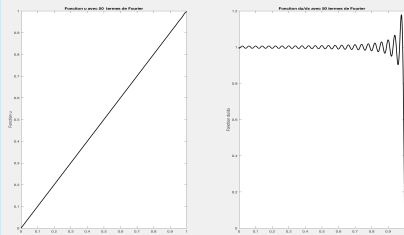
$$u(0) = 0, \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(L) = Tr.$$

La solution est $u(x) = \frac{Tr}{c^2} x$.

Simulation

Zoom↓

Le programme



La solution

et

sa dérivée

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillaire

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

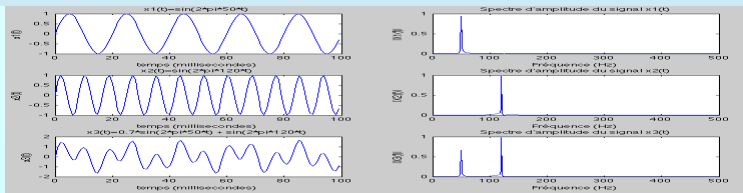
Dans une base modale Fonction de transfert pour un mode avec amortissement

On cherche des solutions sous la forme $u(x, t) = e^{i\omega t} \hat{u}(x)$.
Cela conduit à :

$$\hat{u} \in V, \forall v \in V, -\omega^2 m(\hat{u}, v) + a(\hat{u}, v) = l(v).$$

Si $\{w_n\}$ est une base propre de $a(.,.) / m(.,.)$, on a :

$$\hat{u}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{l(w_n)}{\lambda_n - \omega^2} w_n(x),$$



La poutre de Euler-Bernoulli [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Cas d'une poutre de Euler-Bernoulli

Le modèle (à oublier en dynamique, mais pas en statique.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= f, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad -D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = M, \quad D \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = Tr, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \end{aligned}$$

On peut exprimer la solution u à l'aide des modes propres (w_n, λ_n) solution de :

$$\begin{aligned} \lambda_n w_n &= D \frac{d^4 w_n}{dx^4}, \quad 0 < x < L, \quad \|w_n\|_{[0, L]} = 1, \\ w_n(0) &= \frac{dw_n}{dx}(0) = 0, \quad -D \frac{d^2 w_n}{dx^2}(L) = D \frac{d^3 w_n}{dx^3}(L) = 0 \end{aligned}$$

Quelques exemples [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

La solution (on peut appliquer le Théorème spectral mais...)

$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) w_n(x)$ avec un calcul classique des modes propres :

$$w_n(w) = A_n \left[\cosh(\mu_n x) - \cos(\mu_n x) - \zeta_n (\sinh(\mu_n x) - \sin(\mu_n x)) \right],$$

$$\zeta_n = \frac{\cosh(\mu_n L) \sinh(\mu_n L) - \sin(\mu_n L) \cosh(\mu_n L)}{\cosh(\mu_n L)^2 - 1},$$

et μ_n solution de $\cosh(\mu_n L) \cos(\mu_n L) = -1$. [Solution Graphique](#)

Pour $n \gg 1$ les μ_n sont proches de $\tilde{\mu}_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. En fait, on peut montrer à l'aide d'un petit calcul que :

1) $|\mu_n - \tilde{\mu}_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 2) si $\sum_{n \geq 1} \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$,

3) $\sum_{n \geq 1} \|w_n - \tilde{w}_n\|_{0,[0,L]}^2 < \infty$ où $\tilde{w}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n-1}{2L}\pi x\right)$ qui est une

base Hilbertienne de $L^2([0, L]) \Rightarrow$ (Th. de Kato-Schmidt) w_n aussi.

La poutre de Timoshenko [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Le modèle de Timoshenko

$$\varrho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + GA(\theta + \partial_x u) = M, \quad 0 < x < L,$$

$$\varrho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - GA \partial_x (\theta + \partial_x u) = Tr, \quad 0 < x < L,$$

$$u(0, t) = \theta(0, t) = GA(\theta + \partial_x u)(L, t) = -EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad +C.I.$$

Le contexte variationnel du problème spectral

$$H = [L^2([0, L])]^2, \quad V = \{v \in H^1([0, L]), v(0) = 0\}^2, \quad X = (\theta, u), \quad Y = (\mu, v)$$

$$m(X, Y) = \int_0^L \varrho [I \theta \mu + A u v],$$

$$a(X, Y) = \int_0^L EI \partial_x \theta \partial_x \mu + GA(\theta + \partial_x u)(\mu + \partial_x v).$$

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall X = (\theta, u) \in V, \quad a(X, X) \geq c_0 [||\theta||_{1,[0,L]}^2 + ||u||_{1,[0,L]}^2]$$

Exo

Les vitesses d'onde chez Timoshenko

[Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillaire

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Les invariants

$$p = \partial_t u, \quad q = -EI \partial_x \theta, \quad r = \partial_t \theta, \quad s = -GA(\theta + \partial_x u),$$

$$Z = (p, q, r, s), \quad F = \left(\frac{Tr}{\rho A}, 0, \frac{M}{\rho I}, 0 \right) \text{ et } \partial_t Z + \Lambda \partial_x Z + BZ = F,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho A} \\ 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho I} & 0 & 0 \\ GA & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho I} \\ 0 & 0 & GA & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres et vecteurs propres de Λ

$$Z = e^{-Bt} Y \Rightarrow \partial_t Y + e^{Bt} \Lambda e^{-Bt} \partial_x Y = Q = e^{Bt} F + C.I.$$

$$\text{Les valeurs propres de } \Lambda \text{ sont } c_b = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ et } c_s = \pm \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Remarques

la sous-structuration dynamique (SSD) Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

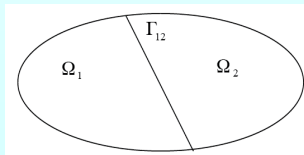
La méthode de Craig et Bampton

On parle aussi de méthode des interfaces bloquées. Cette méthode s'est développée en trois étapes :

- la correction statique (ajout de D.D.L. sur l'interface),
- la correction des vagues (déplacement de l'interface),
- la correction des rides (déformation des interfaces)

Le principe de base de CB :

$$\begin{aligned} \lambda w &= -c^2 \Delta w \text{ dans } \Omega^1 \cup \Omega^2, \\ w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^1 \cup \partial\Omega^2 \cup \Gamma_{12}, \\ \int_{\Omega^1} w^2 &= 1, \quad \int_{\Omega^2} w^2 = 1. \end{aligned}$$



On obtient deux familles indépendantes : $\{w_n^i, \lambda_n^i\}$ que l'on complète car Γ_{12} n'est pas *a priori* une ligne de nœuds.

Voir la suite pour les corrections dites : *des Vagues et des Rides*.

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

La méthode de McNeal ou des interfaces libres

Dans ce cas on s'intéresse aux modes propres solutions de :

$$-c^2 \Delta w^p = \lambda^p w^p \text{ dans } \Omega^p, \quad w^p = 0 \text{ sur } \Gamma_0^p, \quad \frac{\partial w^p}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_{12}.$$

Pour chaque sous-ouvert Ω^p on a une base hilbertienne, mais il faut la prolonger sur Ω .

Prolongement statique de McNeal

Soit w_k^1 un mode propre sur Ω^1 . On construit \tilde{w}_k^1 tel que :

$$\tilde{w}_k^1 = w_k^1 \text{ dans } \Omega^1, \text{ et } \tilde{w}_k^1 \text{ solution de } -c^2 \Delta \tilde{w}_k^1 = 0 \text{ dans } \Omega^2, \quad \tilde{w}_k^1 \in H_0^1(\Omega).$$

Les orthogonalités dans les ouverts Ω^p ne sont pas satisfaites. Les matrices de couplage portent sur les frontières communes. [McNeal](#)

Mais pour les mêmes raisons que celles discutées sur la corde, la qualité est faible et cette approche est inutilisée (sauf par McNeal).

La méthode de Gladwell [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

La méthode de Gladwell

[Visu. Gladwell-Fourier](#)

[Le programme](#)

Mettre un peu de compacité là où il y a des singularités, par exemple aux bords libres où plus généralement à la jonction entre milieux. Il s'agit de trouver une autre base qui converge mieux au voisinage de ces zones. Dans le cas de la corde-fouet, le modèle de Gladwell consiste à introduire les modes -dits de branches- suivants :

$$-c^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \lambda w, \quad 0 < x < L, \quad w(0) = 0, \quad c^2 \frac{dw}{dx}(L) = \lambda M w(L),$$
$$\int_0^L w^2(x) dx + M w(L)^2 = 1.$$

M petit => Neumann homogène et M grand => Dirichlet homogène.

On peut aussi faire un décalage quasi-spectral en posant :

$$c^2 \frac{\partial w}{\partial x}(L) + \zeta w(L) = \lambda M w(L).$$

La famille des solutions $\{w_n\}$ est une base Hilbertienne de $L^2(]0, L[)$

Les modes de branches... [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

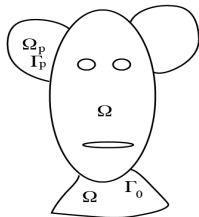
La sous-structuration dynamique

Exemples : un barrage et sa fondation

Un bateau et la mer

On considère une structure principale occupant l'ouvert Ω_0 et des satellites occupant Ω^p , $p = 1, P$. Les interfaces entre Ω et Ω^p sont notées Γ^p . Les sous-structures sont fixées sur Γ_0^p .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2 \nabla u) = f \text{ dans } \cup_{p=0,P} \Omega^p, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 + C.I.$$



$$-\operatorname{div}(c^2 \nabla w^p) = \lambda^p w^p \text{ dans } \Omega^p,$$

$$c^2 \frac{\partial w^p}{\partial \nu} + \xi w^p = \lambda^p w^p \text{ sur } \Gamma^p,$$

$$w^p = 0 \text{ sur } \Gamma_0^p,$$

$$\frac{\partial w^p}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \setminus \{\Gamma_0^p \cup \Gamma^p\}$$

La théorie et la pratique Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Résultat spectral

Soit T l'opérateur linéaire de $H = L^2(\Omega^p) \times L^2(\Gamma^p)$ qui à un couple $(f, g) \in H$, associe le couple $(u|_{\Omega^p}, u|_{\Gamma^p})$ où $u = T(f, g)$ solution de :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(c^2 \nabla u) &= f \text{ dans } \Omega^p, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_0^p, \\ c^2 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \xi u &= g \text{ sur } \Gamma^p \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \{\partial \Omega^p \setminus \Gamma_0^p \cup \Gamma^p\} \end{aligned}$$

L'opérateur T est compact de H dans lui même car u est dans l'espace $H^1(\Omega^p)$ et sa trace sur Γ^p dans $H^{1/2}(\Gamma^p)$. L'injection de $H^1(\Omega^p) \times H^{1/2}(\Gamma^p)$ étant compacte, il en est de même de T .

Remarque sur la compacité additionnelle des modes de branches

En conclusion, les modes propres $\{(w_n)_{|\Omega^p}, (w_n)_{|\Gamma^p}\}$ solutions forment une base Hilbertienne de $L^2(\Omega^p) \times L^2(\Gamma^p)$. Donc $\frac{c^2}{\lambda_n - \xi} \frac{\partial w_n}{\partial \nu} = w_n$ forment une famille génératrice libre de $H^{1/2}(\Gamma^p)$, (mais ce n'est pas une base au sens Hilbertien par exemple). L'approximation de la dérivée normale est cependant meilleure.

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Fonction de transfert à l'aide des modes des SS type CB

On sélectionne des modes notés $\{w_k^p\}$, $k = 1, N_p$, de chaque composante autour d'une fréquence donnée ; (Ω^0 est le maître).

On construit pour chaque satellite (formulation faible), les opérateurs B^p de $H^{1/2}(\Gamma_0^p)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_0^p)$ (Diri.->Neum.), définis par :

$$z \in H^{1/2}(\Gamma_0^p) \xrightarrow{\text{relèvement}} R^p(z) \in H^1(\Omega^p) \xrightarrow{\text{solution faible sur } \Omega^p} y^p \in H^1(\Omega^p)$$

$$y^p = \sum_{i=1, N_p} w_i^p \frac{\int_{\Omega^p} c^2 \nabla R^p(z) \cdot \nabla w_i^p - \omega^2 R(z) w_i^p}{\lambda_i^p - \omega^2} + R^p(z), \quad B^p(z) = \frac{\partial y^p}{\partial \nu}.$$

Le problème maître est alors sous forme variationnelle :

$$\forall v \in V_0, \quad \int_{\Omega_0} c^2 \nabla u^0 \cdot \nabla v - \omega^2 \int_{\Omega_0} u^0 v - \int_{\Gamma^p} c^2 B^p(u^0) v = I_0(v)$$

Les résonances des satellites posent problèmes (->scattering)

L'approche Steklov (dite des vagues) pour améliorer Craig-Bampton

[Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Soit $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ deux ouvert séparés par la frontière Γ_f .

$$-c^2 \Delta w^1 = \lambda^1 w^1 \text{ dans } \Omega^1, \quad w^1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega^1$$

$$-c^2 \Delta w^2 = \lambda^2 w^2 \text{ dans } \Omega^2, \quad w^2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega^2,$$

$$c^2 \frac{\partial z}{\partial \nu} = \zeta z \text{ sur } \Gamma_f, \quad -c^2 \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad z = 0 \text{ sur } \partial[\Omega^1 \cup \Omega^2] \setminus \Gamma_f.$$

On note les orthogonalités suivantes :

[Steklov](#)

$$\int_{\Omega^1} c^2 \nabla w^1 \cdot \nabla z = \int_{\Omega^2} c^2 \nabla w^2 \cdot \nabla z = \int_{\Gamma_f} w^1 z = \int_{\Gamma_f} w^2 z = 0.$$

La famille (w^1, z, w^2) forme une base de $L^2(\Omega^1) \times L^2(\Gamma_f) \times L^2(\Omega^2)$. Cette approche enrichit l'approche de Craig-Bampton qui est néanmoins très utilisée avec le relèvement (écran précédent).

Le couplage entre w^p , $p = 1, 2$ et z , n'a lieu que dans le produit scalaire $L^2(\Omega^1 \cup \Omega^2)$.

L'approche Steklov dite *capillaire* [Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Soit $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ deux ouverts séparés par la frontière Γ_f ($p = 1, 2$) :

$$-c^2 \Delta w^p = \lambda^2 w^p \text{ dans } \Omega^p, \quad w^p = 0 \text{ sur } \partial\Omega^p,$$

$$c^2 \frac{\partial z}{\partial \nu} = \eta, \quad -c^2 \Delta_{\Gamma_f} \eta = \zeta \eta \text{ sur } \Gamma_f, \quad \eta = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_f,$$

$$-c^2 \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad z = 0 \text{ sur } \partial[\Omega^1 \cup \Omega^2] \setminus \Gamma_f.$$

Mêmes orthogonalités que Steklov, mais continuité des contraintes si on double (artificiellement) les fonctions z en faisant une correction statique dans l'ouvert opposé (changement de signe de ν) : Capillarité

$$\int_{\Omega^1} c^2 \nabla w^1 \cdot \nabla z = \int_{\Omega^2} c^2 \nabla w^2 \cdot \nabla z = \int_{\Gamma_f} w^1 z = \int_{\Gamma_f} w^2 z = 0.$$

La famille (w^1, z, w^2) forme encore une base de l'espace $L^2(\Omega^1) \times L^2(\Gamma_f) \times L^2(\Omega^2)$. Mais les fonctions z sont beaucoup plus régulières car dans l'espace $H^1(\Gamma_f)$ au minimum. Les orthogonalités de Steklov sont conservées et le calcul + simple. Voir plus loin....

L'exemple de Kelvin-Neumann et l'insuffisance de Steklov de base (vagues) Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

On considère un bassin rempli d'eau. le déplacement normal de la surface est noté η et le potentiel des vitesses φ . On suppose qu'il y a un écoulement à la vitesse U parallèle à la surface de l'eau au repos.

$$\underbrace{-\sigma \Delta_{\Gamma_f} \eta}_{\text{capillarité}} + \underbrace{\rho g \eta}_{\text{gravité}} + \underbrace{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}_{\text{pression statique}} = 0, \text{ +C.L. + C.I.},$$

$$\underbrace{-\Delta \varphi}_{\text{incompressibilité}} = 0 \text{ dans } \Omega \quad \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x_1}}_{\text{continuité de la vitesse normale}} \text{ sur } \Gamma_f + \text{C.L sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Lorsque $U = 0$ et $\sigma = 0$ on a le modèle de vagues usuel. On retrouve le correcteur de Steklov. Il s'écrit aussi :

$$-\Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ +C.L. + C.I. et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_f.$$

Cependant un phénomène troublant apparaît si $U \neq 0$. Exemples

L'effet Doppler dans un rail

Retour

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Changement de repère

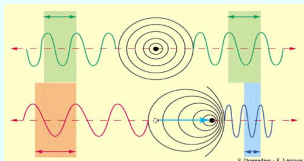
(x, t) repère absolu,

(x', t') repère en translation à la vitesse U

$$x = x' + Ut, \quad t = t', \quad f(x, t) = f'(x', t')$$

$$\partial_{tt} f = \partial_{t't'} f' - 2U \partial_{x't'} f' + U^2 \partial_{x'x'} f'$$

$$\partial_x f(x, t) = \partial_{x'} f'(x', t').$$



Le modèle embarqué : vitesses d'ondes : $U \pm c_b$ et $U \pm c_s$

$$\partial_{t't'} u - 2U \partial_{x't'} u + \partial_{x'} [(U^2 - c_s^2) \partial_{x'} u] - \partial_{x'} (c_s^2 \theta) = Tr / \varrho A, + C.I.,$$

$$\partial_{t't'} \theta - 2U \partial_{x't'} \theta + \partial_{x'} [(U^2 - c_b^2) \partial_{x'} \theta] + c_s^2 (\theta + \partial_{x'} u) = M / \varrho l, + C.I..$$

Exercice : C.L.T. pour le rail

[Retour](#)

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

Version forte

La forme variationnelle de base

Usage classique (mêmes notations)

Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

Craig-Bampton, McNeal, Gladwell

SSD augmentée Steklov et capillarité

L'effet Doppler

Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

On veut tuer les ondes rentrantes en $x = L$ correspondant aux vitesses. $U - c_s$ et $U - c_b$. On note w^* la base propre duale (à gauche) de Λ .



Les questions

- On écrit que :
 $(w^*_{U-c_s}, X(L, t)) =$
 $(w^*_{U-c_b}, X(L, t)) = 0.$

- Montrer que les C.L. sont
 $(U \neq c_b - c_s) :$

$$\partial_t u + (c_s + U) \partial_x (\theta + \partial_x u) = 0$$

et

$$\partial_t \theta + (c_b + U) \partial_x \theta = 0.$$

- Que se passerait-il si $U = c_b - c_s$?

Cours 1: Les outils

Le théorème spectral

- Version forte
- La forme variationnelle de base
- Usage classique (mêmes notations)
- Usage étendu

Quelques exemples simples (très)

- Cas de la corde et de la poutre

La sous-structuration dynamique (SSD)

- Craig-Bampton, McNeal, Gladwell
- SSD augmentée Steklov et capillarité

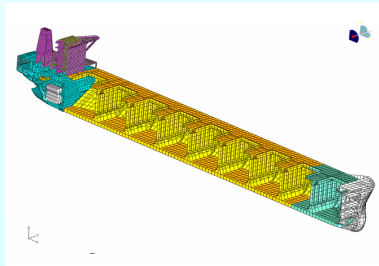
L'effet Doppler

- Un exemple d'application envisageable

Un petit exercice

QCM 1

Répondez aux questions et vérifiez votre score.



Lancer le qcm

Un phare apporte la lumière et permet de se repérer dans une mer parfois très agitée et recouverte de brouillard ; comme en recherche. Mais doit-on regarder uniquement là, où il y a de la lumière ?

Evitez de regarder les réponses trop vite !