

Un bug spectral... avec C. Fabre et O. Wilk Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Le Modèle de Kelvin-Neumann



Observons le lit d'un cours d'eau... [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en η
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements



Ecoulement d'un cours d'eau

et de plus près... [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en $2D$
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ
- Evolution du germe instable

Le modèle en $3D$

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements



Instabilités de surface contenues

Quelques références. . . [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en \mathbb{R}^2

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de \mathbb{R}^2

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge university press, UK, 1978.

Y. Dutreleau, *Résonances pour le problème de Kelvin-Neumann tridimensionnel dans le cas d'un corps immergé*, 5^{me} journées de l'hydrodynamique, mars 1995, Rouen.

C. Van der Stoep, *A three dimensional method for the calculation of the unsteady ship wave pattern using a Kelvin-Neumann approach*, Thesis university of technology of Delft, February 6th 1992.

J.J. Stoker, *Water waves*, Pure and applied mathematics vol. IV, Intersciences publishers, inc., New York, (1957).

E. F. Campana and A. Iafrati, *Direct numerical simulation of surface tension dominated and non-dominated breaking waves*, 24th symposium on Naval hydrodynamics, Fukuoka Japan, July 2002.

D. Richard and P. G. de Gennes, *Capillary gravity waves caused by a moving disturbance wave resistance*, J. Phys. Rev. E., vol. 53, pp. 3448-3455, 1996.

Les exemples supports pour la discussion

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses

critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

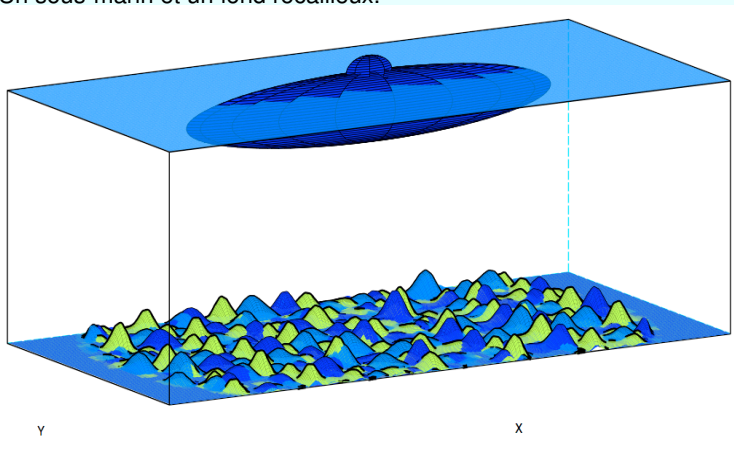
Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Un sous-marin et un fond rocailleux.



Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

1 Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

2 Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en η
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ
- Evolution du germe instable

3 Le modèle en φ

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements

Le modèle fluide [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

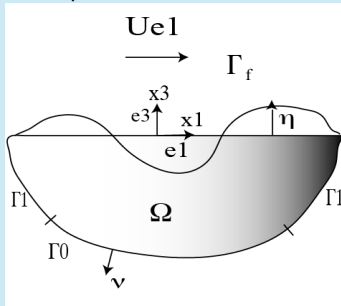
Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Dans l'eau

Incompressible et irrotationnel



A la surface

Modèle avec capillarité



Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

$$\Phi = U\Phi_0 + \varphi,$$

$U\Phi_0$ potentiel stationnaire, φ potentiel de perturbation

Le potentiel stationnaire vérifie :

$$-\Delta\Phi_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_f \cup \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = (e_1, \nu) \text{ sur } \Gamma_1, \quad \text{et par exemple } \int_{\Gamma_f} \Phi_0 = 0.$$

On peut mettre un sous-marin dans Ω sans que cela ne change la formulation (partie de Γ_0). Le cas d'un bateau de surface est aussi possible mais un nouveau phénomène apparaît.

Cas d'un sous-marin au voisinage de la surface

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses

critiques en fonction de σ

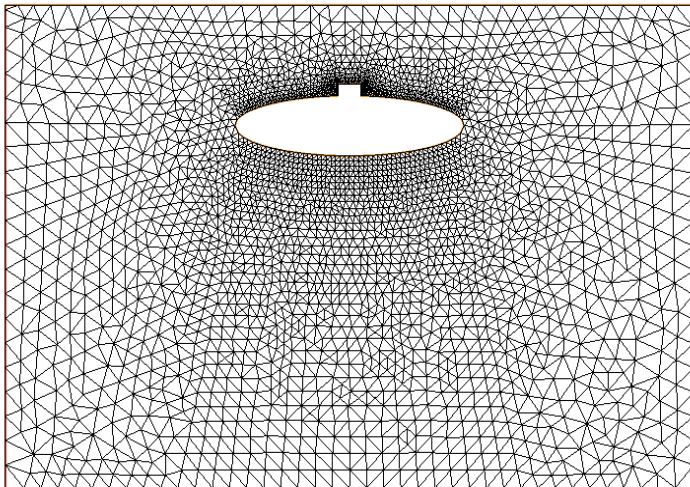
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

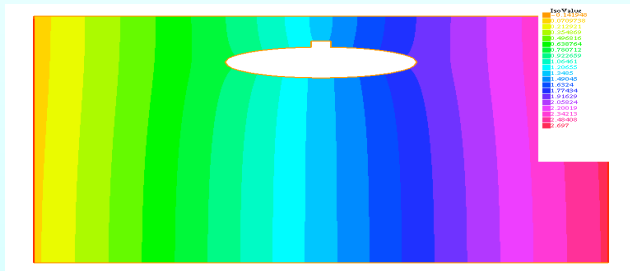
Prolongements



Fonction iso- Φ_0 [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modèle stationnaire

Isovaleurs de Φ_0 .

Cas d'un fond rocheux [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses

critiques en fonction de σ

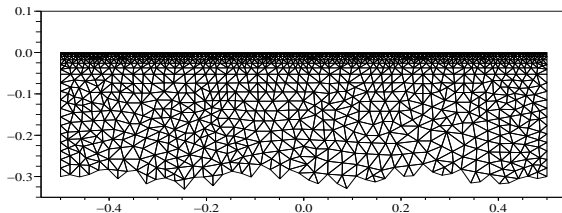
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Maillage avec fond rocailleux

Fonction iso- Φ_0 [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

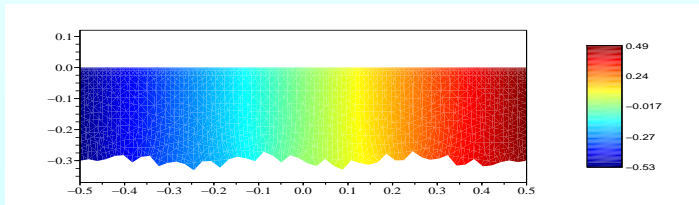
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Isovaleurs du potentiel stationnaire pebble stone bottom Φ_0 .

Vitesse et gradient à la surface avec SM

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

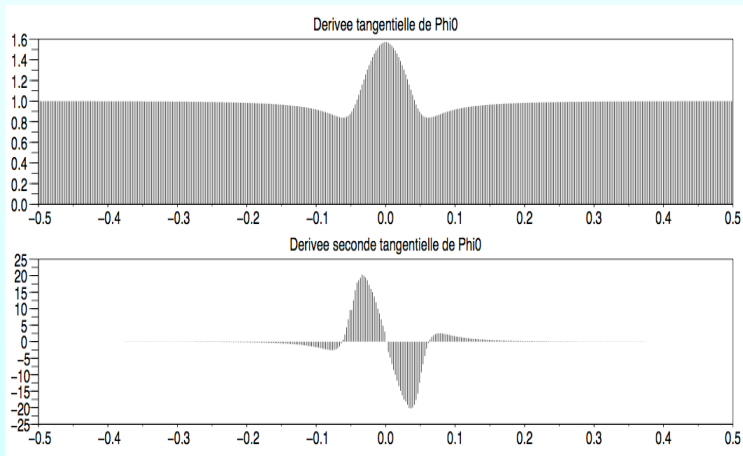
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Vitesse et taux de compression à la surface de l'eau avec PSB

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

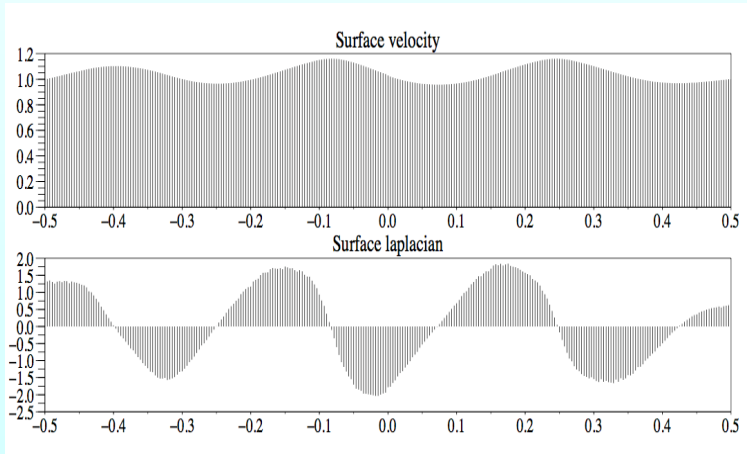
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Toujours dans l'eau mais pour le potentiel de perturbation φ : [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

$$-\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{\eta} + U\nabla_s\Phi_0.\nabla_s\eta \text{ sur } \Gamma_f,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \text{ et par exemple } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Sur la frontière $\partial\Gamma_f$ de Γ_f , on peut choisir par exemple $\eta = 0$ ou η périodique en x_1 .

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

L'équilibre surfacique inclut capillarité, gravité et pression de l'eau :

$$\underbrace{-\sigma \Delta_s \eta}_{\text{capillary}} + \underbrace{\rho g \eta}_{\text{gravity}} + \underbrace{\rho \dot{\varphi} + \rho U \nabla_s \Phi_0 \nabla_s \varphi + \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2}_{\text{moins la pression instationnaire}} = \underbrace{-\frac{\rho}{2} |\nabla \Phi_0|^2 U^2}_{\text{effet Venturi}} \quad \text{sur } \Gamma_f,$$

$$\eta = 0 \quad \text{sur } \partial \Gamma_f.$$

Un modèle plus complet possible ($\text{div}(\frac{\nabla_s \eta}{\sqrt{1 + |\nabla_s \eta|^2}}) = \Delta_s \eta + O(|\nabla_s \eta|^3)$), mais aussi en tenant compte de l'écoulement stationnaire...

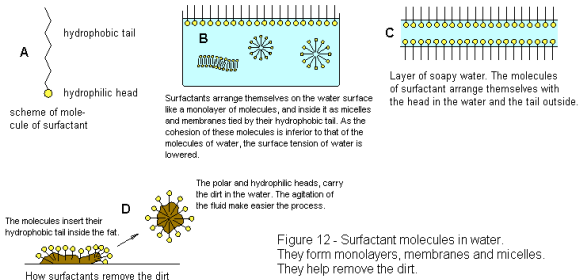


Figure 12 - Surfactant molecules in water.
They form monolayers, membranes and micelles.
They help remove the dirt.

Deux stratégies : éliminer φ ou éliminer η Retour

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Dans tous les cas un opérateur de condensation est utile de façon à se ramener sur la surface Γ_f . Nous le notons G et il joue un rôle fondamental dans toute la suite. Dans le cas d'un milieu semi-infini ce serait l'opérateur de Green. C'est en fait l'opérateur de masse ajoutée.

Définition de G .

Soit g une fonction définie sur Γ_f . On introduit $G(g)$ solution de :

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta G(g) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial G(g)}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \frac{\partial G(g)}{\partial \nu} = g \text{ sur } \Gamma_f, \\ G(g) = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Propriété fondamentale de G [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en \mathcal{H}

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de \mathcal{H}

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

On introduit les espaces de dérivées fractionnaires $H^{1/2}(\Gamma_f)$ et son dual $H^{-1/2}(\Gamma_f)$. On peut intuitivement considérer que les fonctions de cet espace $H^{1/2}$ sont telles que en dimension n , ($n = 1, 2$) :

$$\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{1/2+n/2}} \in L^2(\Gamma_f \times \Gamma_f).$$

On a alors la suite d'inclusions compactes (qui transforment un ensemble borné en un ensemble relativement compact) :

$$H^1(\Gamma_f) \subset H^{1/2}(\Gamma_f) \subset L^2(\Gamma_f) \subset H^{-1/2}(\Gamma_f).$$

Dans ce cadre nous avons :

$$c_0 \|g\|_{-1/2, \Gamma_f} \leq \|G(g)\|_{1/2, \Gamma_f} \leq c_1 \|g\|_{-1/2, \Gamma_f}.$$

Iso-G pour différentes profondeurs du Sous-marin

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses

critiques en fonction de σ

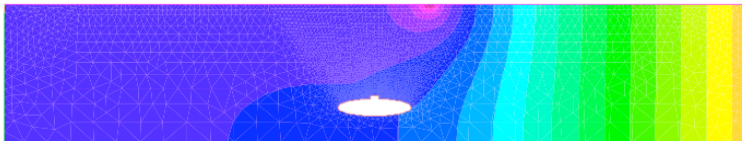
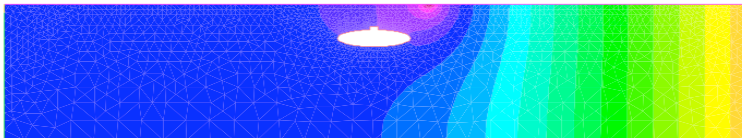
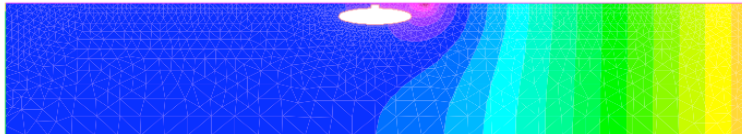
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Le théorème spectral Soient :

- $a(., .)$ une forme bilinéaire symétrique positive et équivalente au carré de la norme sur un espace de Hilbert V ,
- $m(., .)$ une forme bilinéaire symétrique positive et équivalente au carré de la norme sur un espace de Hilbert H .

On considère le problème de valeurs propres :

$$(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = \lambda m(u, v), \quad m(u, u) = 1.$$

Le théorème spectral s'énonce ainsi : (la famille u_n est une base hilbertienne de H)

Si $V \subset H$ avec compacité alors :

$$\exists (u_n, \lambda_n), \quad \lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty \text{ et } \lambda_n > 0 \text{ multiplicité finie } (\lambda_n \geq \lambda_0 > 0)$$

Si $H \subset V$ avec compacité alors :

$$\exists (u_n, \lambda_n), \quad \lambda_n \rightarrow 0 \text{ et } 0 < \lambda_n \leq \lambda_0 \text{ avec multiplicité finie.}$$

Application du théorème spectral aux vagues

Retour

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

On a sur Γ_f :

$$\varphi = G(\dot{\eta} + U \nabla_s \eta \cdot \nabla_s \Phi_0) = G(\dot{\eta}) + U G(\nabla_s \eta \cdot \nabla_s \Phi_0).$$

On obtient ainsi que η est à l'ordre 1 solution de :

$$\begin{aligned} \forall v \in V = H_0^1(\Gamma_f), \\ \underbrace{\varrho \int_{\Gamma_f} G(\ddot{\eta}) v}_{\text{inertie du bassin}} + \underbrace{U \int_{\Gamma_f} [G(\nabla_s \dot{\eta} \cdot \nabla_s \Phi_0) v - G(\dot{\eta}) \nabla_s v \cdot \nabla_s \Phi_0] - \Delta_s \Phi_0 G(\dot{\eta}) v}_{\text{couplage cinétique}} \\ + \underbrace{\int_{\Gamma_f} \sigma \nabla_s \eta \cdot \nabla_s v + \varrho g \eta v - U^2 \int_{\Gamma_f} \overbrace{G(\nabla_s \eta \cdot \nabla_s \Phi_0) [\nabla_s v \cdot \nabla_s \Phi_0 + \Delta_s \Phi_0 v]}^{\text{retard de pression}}}_{\text{capillarité+gravité}} = 0. \end{aligned}$$

Ou encore sous forme variationnelle avec des notations évidentes :

$$\forall v \in V, \mathcal{M}(\ddot{\eta}, v) + 2UC(\dot{\eta}, v) + \mathcal{A}_0(\eta, v) - U^2 \mathcal{A}_1(\eta, v) = 0.$$

Notion de vitesse critique [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

On considère le problème de valeurs propres :

trouver $w \in V$, tel que :

$$\forall v \in V, \mathcal{A}_0(w, v) = \lambda \mathcal{A}_1(w, v), \mathcal{A}_1(w, w) = 1.$$

Si $\sigma > 0$ on choisit :

$$V = H_0^1(\Gamma_f) \quad H = H^{1/2}(\Gamma_f).$$

Par conséquent $\exists \lambda_0 > 0$ telle que :

$$\forall v \in V, \mathcal{A}_0(v, v) \geq \lambda_0 \mathcal{A}_1(v, v),$$

d'où :

$$U < U_c = \sqrt{\lambda_0} \Rightarrow \mathcal{A}_0(v, v) - U^2 \mathcal{A}_1(v, v) \geq c \|v\|_{1, \Gamma_f}^2,$$

ce qui implique la stabilité du modèle et l'instabilité si $U > U_c$ Le nombre de modes instables pour U donnée est fini, décroissant avec σ .

Renversement de la compacité Retour

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses

critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

On suppose que $\sigma = 0$. Cette fois on choisit :

$$V = L^2(\Gamma_f) \text{ (au lieu de } H_0^1(\Gamma_f)) \text{ et } H = H^{1/2}(\Gamma_f).$$

Cette fois on a :

$$H \subset V \text{ avec compacité.}$$

Par conséquent le modèle de valeurs propres est inversé :

$$\exists \lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } 0 < \lambda_n \leq \lambda_0.$$

Donc :

$$\forall U > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \lambda_n < U.$$

Donc quelque soit la vitesse U il existe une infinité de modes instables. Dans un raffinement de maillage lors d'une approximation numérique, la situation s'aggrave !

L'explication physique est que l'absence de capillarité fait qu'un écoulement même à très faible vitesse fait éclater la surface de l'eau. Le modèle n'a pas de sens. Or c'est le modèle de Kelvin-Neumann.

Un cas simple pour illustrer Retour

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

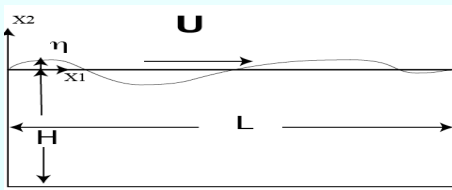
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



On trouve les solutions suivantes au modèle de valeurs propres :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right), \\ G_n(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \coth\left(\frac{n\pi(x_2 + H)}{L}\right), \\ \lambda_n = H\left[g + \frac{n^2 \pi^2 \sigma}{L^2 \varrho}\right] \frac{\tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}{\frac{n\pi H}{L}} \simeq \frac{Lg}{n\pi} + \frac{n\pi \sigma}{L\varrho} = \frac{g}{k} + \frac{k\sigma}{\varrho}, \quad (k = \frac{n\pi}{L}). \end{array} \right.$$

Exemple : 9.81 m/s^2 , $\sigma = 0,075 \text{ N/m}$, $\varrho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, $k = 362 \text{ m}^{-1}$, $U_c \simeq 0.233 \text{ m/s} = 0.84 \text{ km/h}$, si

$U < U_c$ pas de vague !

Comportement des valeurs propres (et donc de U_c^2) [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

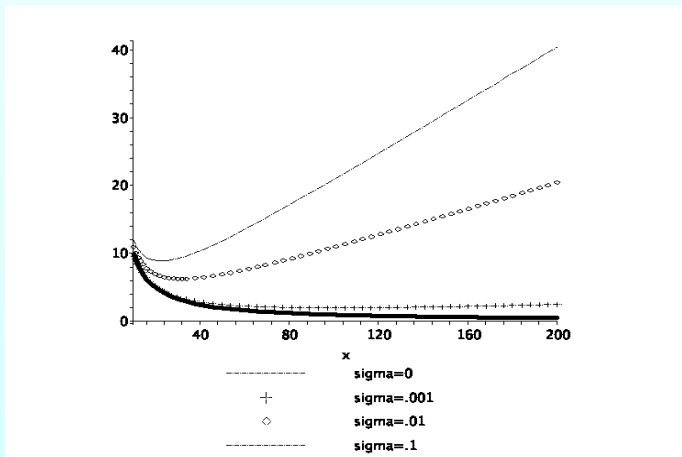
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



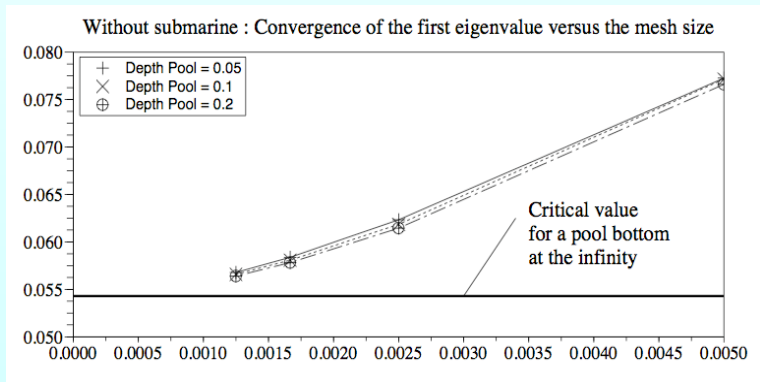
On a tracé plusieurs courbes en fonction de σ . La courbe en gras correspond à $\sigma = 0$.

Convergence du calcul des vitesses critiques

Retour

Le Modèle de Kelvin-Neumann

On connaît la valeur théorique : $U = .23 \dots m/s$ pour un bassin rectangulaire. En raffinant le maillage on obtient :



On constate que la convergence est lente.

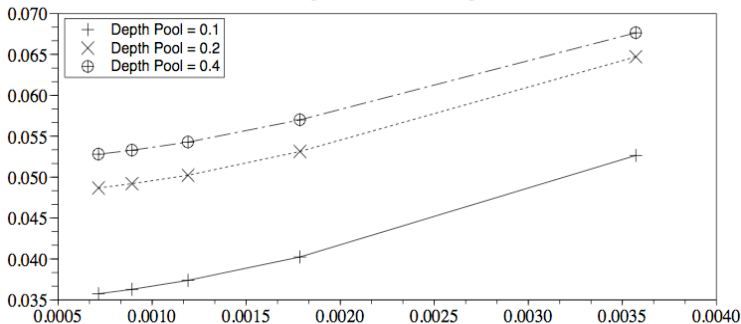
Convergence du calcul des vitesses critiques

[Retour](#)

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

On ne connaît pas la valeur théorique en présence d'un fond rocailleux. En raffinant le maillage on obtient :

Pebble Stone Bottom : Convergence of the first eigenvalue versus the mesh size



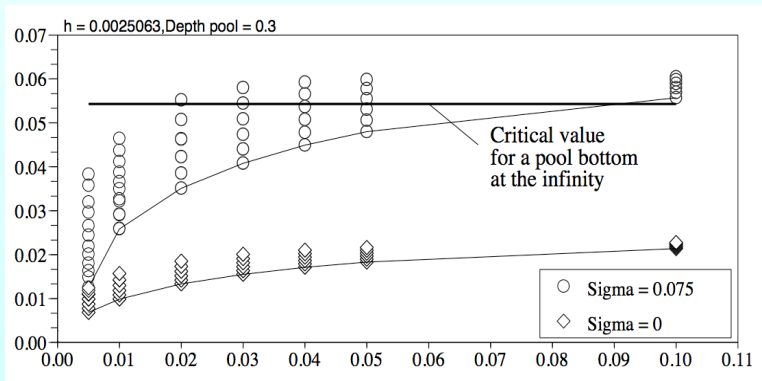
Même conclusion sur la lenteur de la convergence.

Evolution du spectre avec la profondeur du sous-marin

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

On obtient :

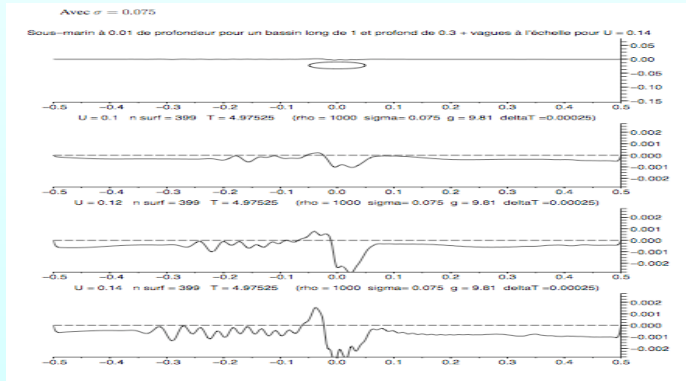


Sillage sous-marin avec le modèle complet

Retour

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

On obtient :



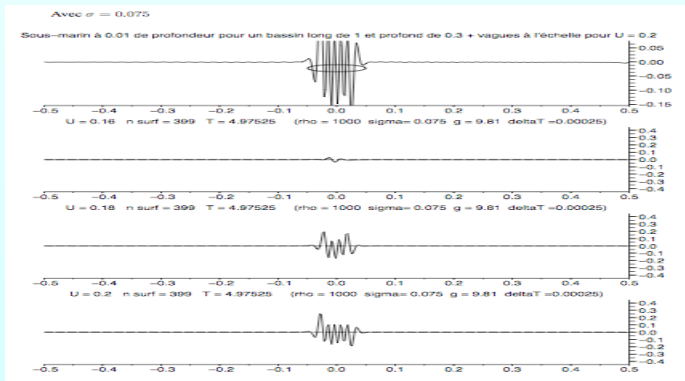
On retrouve la présence de l'instabilité structurée pour la vitesse critique trouvée.

Sillage derrière un sous-marin avec le modèle complet

[Retour](#)

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

Pour d'autres vitesses :



(attention au changement d'échelle)

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de
l'eau

Elimination d'un des
deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des
vagues

Dégénérescence de la
compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses
critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de
Kelvin-Neumann enrichi

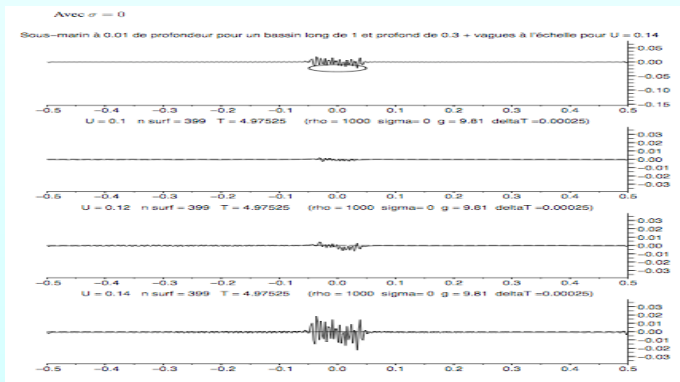
Prolongements

Sillage derrière un sous-marin avec le modèle Kelvin-Neumann

[Retour](#)

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

On obtient :



L'instabilité est *fractale* (plus on raffine plus il apparaît d'instabilités)

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de
l'eau

Elimination d'un des
deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des
vagues

Dégénérescence de la
compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses
critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de
Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Influence de la profondeur du sous-marin sur le sillage

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques

Le modèle en η

- Stabilité et instabilité des vagues

- Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

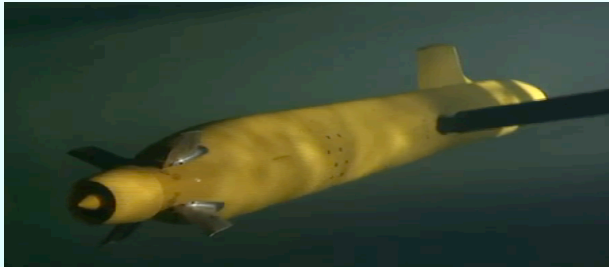
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

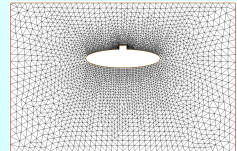
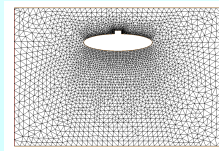
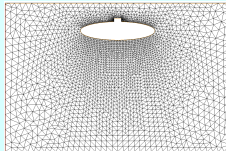
- Elimination de η

- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

- Prolongements



Plusieurs profondeurs et deux vitesses d'avancement du sous-marin



Influence de la profondeur sur les vagues

PSB [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques

Le modèle en η

- Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Plusieurs vitesses d'écoulement profondeur importante

Influence de la profondeur sur les vagues

PSB [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques

Le modèle en η

- Stabilité et instabilité des vagues

- Dégénérescence de la compacité

- Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η

- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

- Prolongements



Plusieurs vitesses d'écoulement faible profondeur

Evolution de l'énergie pour différentes vitesses d'avance U

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

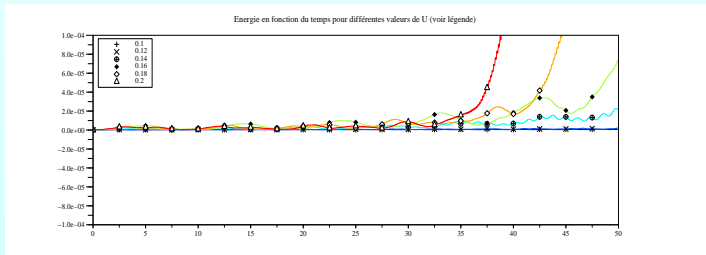
Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Avec capillarité et pour un schéma conservatif :

$$M \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} + 2UC \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} + A \frac{\eta^{n+1} + \eta^{n-1}}{2} = 0$$



Visualisation de la vague de surface pour $U = 0.1$ à $U = .14$ (stable) [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques

Le modèle en η

- Stabilité et instabilité des vagues

- Dégénérescence de la compacité

- Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

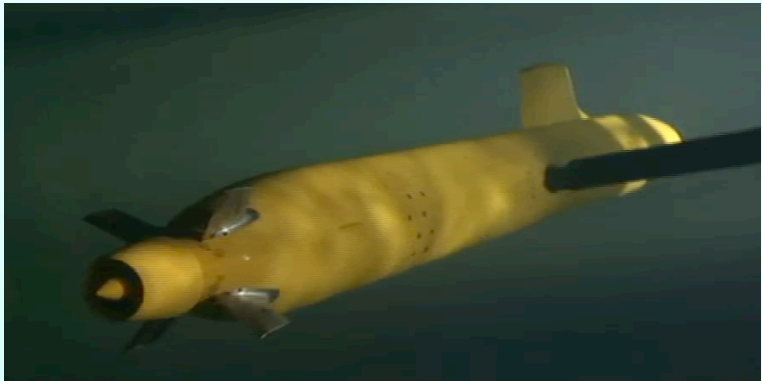
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η

- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

- Prolongements



Plusieurs vitesses d'avance du sous-marin

Visualisation de la vague de surface pour $U = 0.16$ à $U = .2$ (instable) [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

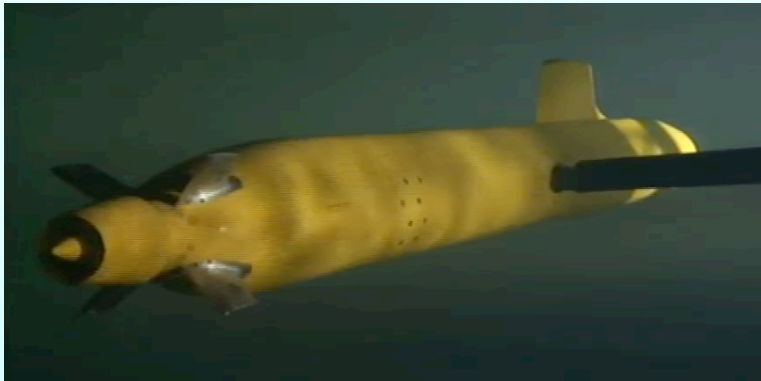
- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en η
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ**
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements



Plusieurs vitesses d'avance du sous-marin

Evolution de l'énergie pour différentes vitesses d'avance U

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Sans capillarité (Kelvin-Neumann) et pour un schéma conservatif :

$$M \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} + 2UC \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} + A \frac{\eta^{n+1} + \eta^{n-1}}{2} = 0$$

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

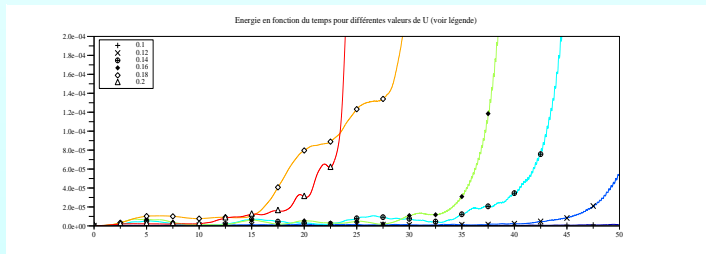
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Très mauvais en présence d'instabilités.

Evolution de l'énergie pour différentes vitesses d'avance U

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Avec capillarité et pour un schéma dissipatif :

$$M \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} + 2UC \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + A \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} = 0$$

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

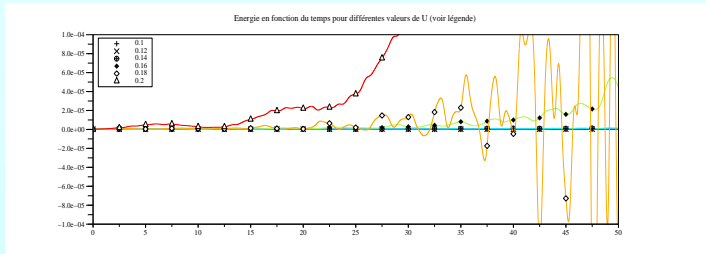
Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements



Visualisation de la vague de surface pour $U = 0.1$ à $U = .14$ (stable) [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques

Le modèle en η

- Stabilité et instabilité des vagues

- Dégénérescence de la compacité

- Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

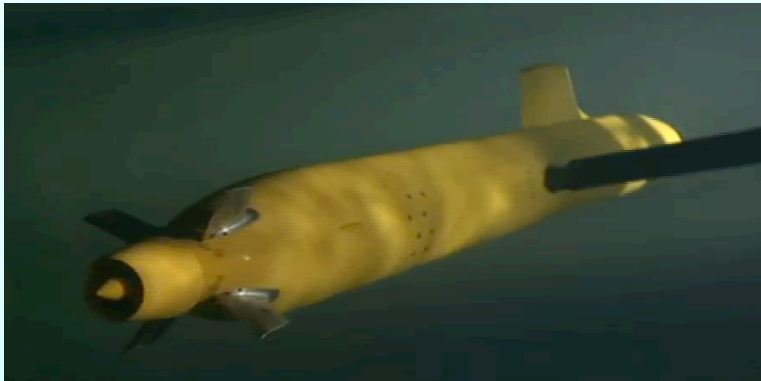
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η

- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

- Prolongements



Plusieurs vitesses d'avance du sous-marin

Visualisation de la vague de surface pour $U = 0.16$ à $U = .2$ (instable) [Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

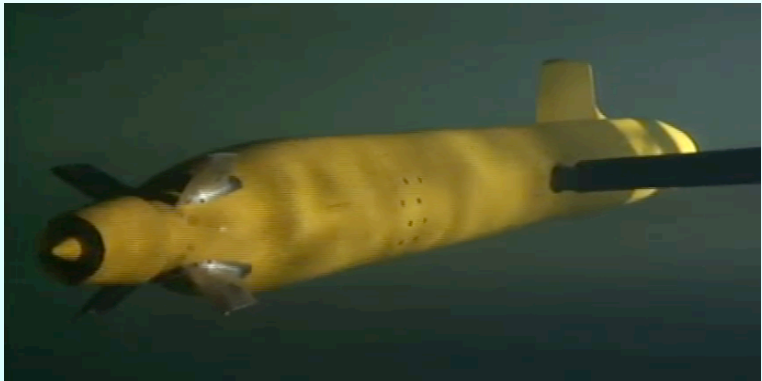
- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en η
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ**
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements



Plusieurs vitesses d'avance du sous-marin

Evolution de l'énergie pour différentes vitesses d'avance U

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

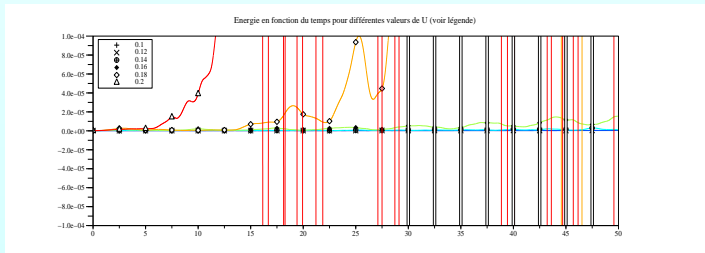
Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Sans capillarité (Kelvin-Neumann) et pour un schéma dissipatif :

$$M \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} + 2UC \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + A \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} = 0$$



Prise en compte de la non-linéarité sur une instabilité

[Retour](#)

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de
l'eau

Elimination d'un des
deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des
vagues

Dégénérescence de la
compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses
critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de
Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Le modèle non-linéaire de vague est (par exemple) $\forall v \in V : :$

$$\mathcal{M}(\ddot{\eta}, v) + 2UC(\dot{\eta}, v) + \mathcal{A}_0(\eta, v) - U^2 \mathcal{A}_1(\eta, v) + \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_f} |\nabla G(\dot{\eta} + U \nabla_s \eta \cdot \nabla_s \Phi_0)|^2 v = 0$$

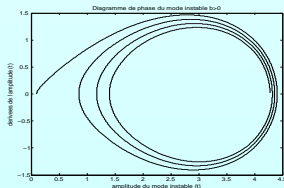
Pour simplifier, cherchons une solution *sans esclave* en posant :

$$\eta = \xi(t) w_0, \text{ où } w_0 \text{ est un mode propre instable.}$$

On obtient une équation différentielle non linéaire en ξ :

$$\ddot{\xi} + (\lambda_0 - U^2)\xi + \alpha \dot{\xi}^2 + U\beta \xi \dot{\xi} + U^2 \gamma \xi^2 = 0, \alpha > 0, \gamma > 0.$$

La solution peut se représenter dans le plan des phases et conduit soit à un cycle limite (gauche), soit une instabilité (droite) ; $U > U_c$.



Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Au lieu d'éliminer φ on peut aussi éliminer η . La méthode est classique et consiste (voir J.J. Stoker) à prendre la dérivée convective de l'équation des vagues et celle de continuité cinématique. **Le modèle est équivalent** mais **totalemtent instable** si $\sigma = 0$. On obtient ainsi le modèle de Kelvin-Neumann enrichi par la capillarité. Rappelons sa formulation lorsque $\sigma = 0$ car elle est très simple : Notons

$$D_t(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s(\cdot) \text{ l'opérateur de dérivation convective,}$$

On l'applique à l'équation d'équilibre de la surface libre Γ_f :

$$[-\sigma \Delta_s + \varrho g] D_t \eta = -[\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho U \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi].$$

D'où :

$$D_t \eta = -A[\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\varrho U \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho U^2 \nabla_s(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi)].$$

avec

$$A = [-\sigma \Delta_s + \varrho g]^{-1} \text{ sur } H_0^1(\Gamma_f).$$

Lorsque $\sigma = 0$: $A = \frac{1}{\varrho g} I_d$.

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

On élimine η dans l'équation de l'eau et on utilise une intégration par parties en s ($\varphi = 0$ sur $\partial\Gamma_f$) :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in W_0, \quad & \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \int_{\Gamma_f} D_t \eta \psi = \\ & -\varrho \int_{\Gamma_f} A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi \\ & -\varrho U \int_{\Gamma_f} [A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \psi - A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial t}] \\ & +\varrho U^2 \int_{\Gamma_f} (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi); (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi). \end{aligned}$$

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des vagues

Dégénérescence de la compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

Trouver $\varphi \in W_0$ telle que $\forall \psi \in W_0$:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\varrho \int_{\Gamma_f} A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi}^{\text{terme d'inertie}} + \overbrace{\varrho U \int_{\Gamma_f} [A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \psi - A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial t}]}^{\text{simili-Coriolis}} \\ & \overbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi}^{\text{raideur fluide}} - \overbrace{\varrho U^2 \int_{\Gamma_f} (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi); (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi)}^{\text{retard de pression}} = 0. \end{aligned}$$

Soit sous forme symbolique :

$$\forall \psi \in W_0, \mathcal{M}(\ddot{\varphi}, \psi) + 2UC(\dot{\varphi}, \psi) + \mathcal{A}(\varphi, \psi) = 0.$$

Vagues de sillage en fonction de la vitesse : linéaire/non-linéaire

[Retour](#)

Le Modèle de Kelvin-Neumann

Modélisation

- Dans l'eau
- Modèle stationnaire
- Modèle local à la surface de l'eau

Elimination d'un des deux champs inconnus

- L'opérateur G
- Outils mathématiques
- Le modèle en η
- Stabilité et instabilité des vagues
- Dégénérescence de la compacité
- Exemple analytique
- Evolution des vitesses critiques en fonction de σ
- Evolution du germe instable

Le modèle en φ

- Elimination de η
- Le modèle de Kelvin-Neumann enrichi
- Prolongements



Plusieurs vitesses d'avance en linéaire

Plusieurs vitesses d'avance en non-linéaire

On peut construire le modèle avec bateau. . . [Retour](#)

Le Modèle de
Kelvin-Neumann

Modélisation

Dans l'eau

Modèle stationnaire

Modèle local à la surface de
l'eau

Elimination d'un des
deux champs inconnus

L'opérateur G

Outils mathématiques

Le modèle en η

Stabilité et instabilité des
vagues

Dégénérescence de la
compacité

Exemple analytique

Evolution des vitesses
critiques en fonction de σ

Evolution du germe instable

Le modèle en φ

Elimination de η

Le modèle de
Kelvin-Neumann enrichi

Prolongements

La prise ne compte d'un bateau de surface avec tossage est possible. Cependant il apparaît des solutions *mesures* et une formulation spéciale est nécessaire. Photos web d'un accident survenu en 1977 :



Mais dans ce cas il est nécessaire d'introduire la loi de restitution de l'énergie au moment du contact... Une formulation fonctionne avec absorption locale totale, mais qui autorise un rebond par arc-boutement.