

Annexe extraite de la thèse de Benjamin Gourraud

THÉORIE SPECTRALE

A

A.1 RÉSULTATS CLASSIQUES DE THÉORIE SPECTRALE

Nous commençons par rappeler quelques notions standards de théorie spectrale. Dans toute cette sous-section, A est un opérateur défini sur un espace de Hilbert, que l'on va noter X , à valeurs dans ce même espace de Hilbert X . Nous noterons $(\cdot, \cdot)_X$ un produit scalaire sur X et $\|\cdot\|_X$ la norme associée à ce produit scalaire : $\|u\|_X := \sqrt{(u, u)_X}$ pour tout $u \in X$. Les principales références d'où les résultats que l'on va énoncer sont tirés sont [EE87], [HS95] et [RS72].

A.1.1 Rappels sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert

Nous notons $D(A)$ le *domaine* de l'opérateur A . Nous définissons $\text{Ker}(A)$ le *noyau* de A : $\{v \in D(A), Av = 0\}$ et $\text{Im}(A)$ l'*image* de A : $\{Av, v \in D(A)\}$.

L'opérateur A est dit *borné* (ou *continu*) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in X, \|Au\|_X \leq C\|u\|_X.$$

Un opérateur est *non borné* si aucune constante C ne convient. Nous définissons le *graphe* de A : $\text{Gr}(A)$:

$$\text{Gr}(A) := \{(u, Au), u \in D(A)\}.$$

Un opérateur A est dit *fermé* si $\text{Gr}(A)$ est un sous-espace dense dans $X \times X$. Un opérateur fermé tel que $D(A) = X$ est nécessairement borné. Un opérateur sera dit à *domaine dense* si $D(A)$ est dense dans X .

Définissons un cas particulier d'opérateur borné, qui est très important. L'opérateur A est dit *compact* de X si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée de X , on peut extraire de $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. Un tel opérateur transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique $Au_n \rightarrow Au$ dans X .

Nous pouvons généraliser cette définition : un opérateur B est dit *A-compact* si $D(A) \subset D(B)$ et pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D(A)$, bornée pour la norme du graphe de A (pour $\|\cdot\|_X + \|A \cdot\|_X$), il existe une sous-suite convergente de $(Bu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X .

Définissons maintenant une catégorie particulière d'opérateurs compacts : les opérateurs de *Hilbert-Schmidt*. Un opérateur T est de Hilbert-Schmidt si, étant donné une base orthonormale (x_n) de X , la quantité suivante :

$$\|T\|^2 = \sum_n \|Tx_n\|_X^2$$

est finie. On vérifie que la quantité $\|T\|$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

Soit maintenant un opérateur à domaine dense. L'adjoint de l'opérateur A est l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset X \rightarrow X$ défini par :

$$D(A^*) := \{v \in X, \exists C > 0, \forall u \in X, |(Au, v)_X| \leq C\|u\|_X\}, \text{ tel que} \\ (Au, v)_X = (u, A^*v)_X, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Pour pouvoir définir l'adjoint, il est nécessaire d'avoir la propriété de domaine dense. Nous le supposons donc. Par théorème de Riesz, on peut également définir le domaine de A^* par :

$$\{v \in X, \exists w \in X, \forall u \in X, (Au, v)_X = (u, w)_X\}.$$

Un opérateur est dit *autoadjoint* si $A^* = A$, ce qui signifie deux choses :

- $D(A) = D(A^*)$,
- $Au = A^*u, \forall u \in D(A)$.

Une caractérisation utile des opérateurs autoadjoints est la suivante :

Proposition A.1 (caractérisation des opérateurs autoadjoints) *Soit A un opérateur fermé symétrique, c'est-à-dire tel que :*

$$(Au, v)_X = (u, Av)_X, \forall u, v \in D(A).$$

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Im}(A + \lambda I) = X$, alors $D(A)$ est dense dans X et A est autoadjoint.

Dans le cas d'un opérateur A autoadjoint pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, nous noterons $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire si l'on prend un produit scalaire sur \mathbb{C}) associée à cet opérateur, i.e.

$$a(u, v) = (Au, v)_X, \forall u, v \in D(A).$$

Dans nos cas d'application, la forme ainsi créée peut être étendue sur un espace plus gros que $D(A)$, de telle manière que la forme soit fermée (cf. [Kat76]). On notera V cet espace. Et on aura de plus : $D(A) \subset V \subset X$, avec injections denses et continues.

On dit qu'un opérateur est *normal* si $AA^* = A^*A$. Un opérateur autoadjoint est un cas particulier d'opérateur normal. Nous allons, dans la suite, énoncer des propriétés des opérateurs autoadjoints. La plupart d'entre elles peuvent être généralisées (moyennant aménagements) pour des opérateurs normaux.

Nous définissons plusieurs notions :

- La *nullité* (nullity en anglais) $\text{nul}(A)$ de A est la dimension de $\text{Ker}(A)$,
- La *déficiéce* (deficiency en anglais) $\text{def}(A)$ de A est la codimension de $\text{Im}(A)$ dans X .
- L'*indice* (index en anglais) est défini par : $\text{ind}(A) := \text{nul}(A) - \text{def}(A)$. Si ind est utilisé, alors nul et def sont implicitement finis.

Nous définissons maintenant l'ensemble résolvant et le spectre :

- L'*ensemble résolvant* $\rho(A)$ de A est défini comme l'ensemble des points du plan complexe où $A - \lambda I$ est inversible, ce qui peut s'exprimer :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{nul}(A - \lambda I) = \text{def}(A - \lambda I) = 0\}, \quad (\text{A.1})$$

- le *spectre* de A , noté $\Lambda(A)$ est le complémentaire dans \mathbb{C} de l'ensemble résolvant, i.e. l'ensemble des points du plan complexe où $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Lorsque $\lambda \in \rho(A)$, nous notons $R_A(\lambda)$, et appelons la *résolvante* de A au point λ , l'opérateur inverse de $A - \lambda I$. C'est un opérateur borné, par application du théorème de l'application ouverte (ou du graphe fermé, [Bre83, théorème II.7]) en supposant que A est fermé, ce que nous supposons.

On montre que $\mathbb{C} = \Lambda(A) \oplus \rho(A)$, $\rho(A)$ est un fermé de \mathbb{C} et $\Lambda(A)$ est un ouvert de \mathbb{C} . On montre également que si l'opérateur A est autoadjoint, alors son spectre est réel.

On définit l'*image numérique* de A , notée $\Gamma(A)$, par :

$$\Gamma(A) := \{(Au, u)_X, \forall u \in X, \|u\|_X = 1\}.$$

On montre que $\Gamma(A)$ est un ensemble convexe. On montre que si A est borné ou si A est autoadjoint (mais non nécessairement borné), alors $\Lambda(A) \subset \overline{\Gamma(A)}$.

Un opérateur A est *m-sectoriel* si son image numérique est contenue dans un cône de la forme : $S_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| \leq \delta\}$, où $\delta \in [0, \pi/2[$ et si $\mathbb{C} \setminus S_\delta \cap \rho(A) \neq \emptyset$.

Nous définissons le *rayon spectral* d'un opérateur A (spectral radius en anglais), noté $\text{spr}(A)$, par :

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda|.$$

Nous avons la caractérisation suivante du rayon spectral :

$$\text{spr}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Un opérateur est dit *quasinilpotent* si son rayon spectral est nul.

Nous allons maintenant voir trois décompositions différentes du spectre. La première est générale (elle s'applique à des opérateurs non nécessairement autoadjoints), les deux autres s'appliquent à des opérateurs autoadjoints. Enfin, nous rappellerons un résultat important pour les opérateurs autoadjoints : la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées.

A.1.2 Spectre ponctuel, spectre continu, spectre résiduel

A est un opérateur fermé de domaine dense, non nécessairement autoadjoint. Nous définissons :

- le *spectre ponctuel* $\Lambda_p(A)$:

$$\Lambda_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{nul}(A - \lambda I) > 0\} \quad (\text{A.2})$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}, \quad (\text{A.3})$$

- le *spectre continu* $\Lambda_c(A)$:

$$\Lambda_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ n'est pas fermée, nul}(A - \lambda I) = \text{def}(A - \lambda I) = 0\} \quad (\text{A.4})$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est injectif et Im}(A - \lambda I) \text{ est dense dans } X\}, \quad (\text{A.5})$$

- le *spectre résiduel* $\Lambda_r(A)$:

$$\Lambda_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{nul}(A - \lambda I) = 0, \text{def}(A - \lambda I) > 0\} \quad (\text{A.6})$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est injectif et Im}(A - \lambda I) \text{ n'est pas dense dans } X\}. \quad (\text{A.7})$$

Ceci nous donne une décomposition du spectre :

$$\Lambda(A) = \Lambda_p(A) \oplus \Lambda_c(A) \oplus \Lambda_r(A). \quad (\text{A.8})$$

Si $\lambda \in \Lambda_p(A)$, alors λ est appelée une *valeur propre* de A . Une fonction $u \in D(A)$, $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$ est alors une *fonction propre*. Nous appelons *sous-espace géométrique* le sous-espace $\text{Ker}(A - \lambda I)$ et *multiplicité géométrique* le nombre $\text{nul}(A - \lambda I)$.

On montre également que $\lambda \in \Lambda_r(A)$ si, et seulement si, $\lambda \notin \Lambda_p(A)$ et $\bar{\lambda} \in \Lambda_p(A^*)$. Dans le cas d'un opérateur A autoadjoint, on vérifie alors que le spectre résiduel est vide.

A.1.3 Spectre discret, spectre essentiel

A est un opérateur autoadjoint fermé et de domaine dense. Voir la section A.2.1 pour des généralisations de ce qu'on va dire ici pour des opérateurs non autoadjoints.

Nous définissons :

- le *spectre discret* $\Lambda_{disc}(A)$ comme l'ensemble des valeurs propres de multiplicité géométrique finie et isolées dans le spectre,
- le *spectre essentiel* $\Lambda_e(A)$ comme le complémentaire dans le spectre de $\Lambda_{disc}(A)$.

Ainsi, on vérifie que $\Lambda_{disc}(A) \subset \Lambda_p(A)$ et que $\Lambda_e(A)$ est un fermé de \mathbb{C} . De plus, on a la décomposition du spectre suivante :

$$\Lambda(A) = \Lambda_{disc}(A) \oplus \Lambda_e(A). \quad (\text{A.9})$$

Donnons tout d'abord quelques détails sur le spectre discret. En toute généralité, considérons un opérateur A non nécessairement autoadjoint et λ un point du spectre, isolé. Soit \mathcal{C}_λ un contour dans le plan complexe qui entoure cette valeur λ . Alors définissons :

$$P_\lambda := \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} R_A(\xi) d\xi. \quad (\text{A.10})$$

On vérifie que P_λ ne dépend pas du contour choisi \mathcal{C}_λ et définit une projection, appelée *projection spectrale* (ou projection de Riesz). En fait, nous pouvons définir un calcul fonctionnel holomorphe : pour f holomorphe dans un ouvert contenant \mathcal{C} , un contour englobant tout le spectre de A , nous pouvons définir $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f(\xi) R_A(\xi) d\xi. \quad (\text{A.11})$$

Nous pouvons développer la résolvante en série de Laurent au voisinage de λ , λ étant toujours un point isolé du spectre : dans le cas général où A n'est pas nécessairement autoadjoint, on obtient :

$$R_A(\xi) = \frac{-1}{\xi - \lambda} P_\lambda - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \lambda)^{n+1}} D_\lambda^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi - \lambda)^n S_\lambda^{n+1}, \quad (\text{A.12})$$

où

$$D_\lambda := (A - \lambda I)P_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} (\xi - \lambda) R_A(\xi) d\xi, \quad (\text{A.13})$$

$$S_\lambda := \lim_{\xi \rightarrow \lambda} R(\xi)(I - P) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{1}{\xi - \lambda} R_A(\xi) d\xi. \quad (\text{A.14})$$

On montre alors que D_λ et S_λ sont des opérateurs bornés et que D_λ est quasinilpotent. On définit alors le *sous-espace algébrique* comme l'espace $P_\lambda X$ et la *multiplicité algébrique* comme la dimension du sous-espace algébrique.

De manière générale (A non autoadjoint), on montre que si λ est une valeur propre, le sous-espace géométrique est inclus dans le sous-espace algébrique. Quand le sous-espace géométrique est strictement inclus dans le sous-espace algébrique, alors il y a un *bloc de Jordan*. Pour voir de quoi il s'agit, prenons une valeur propre λ de multiplicité géométrique égale à 1 et de multiplicité algébrique strictement supérieure à 1. L'image de P_λ où P_λ est le projecteur spectral associé à A et à la valeur propre λ , défini par (A.10), peut s'exprimer dans une certaine base sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notons (u_0, u_1, \dots, u_n) cette base. C'est ce qu'on appelle une *chaîne de Jordan* : u_0 est une fonction propre et u_1, \dots, u_n sont des *fonctions propres généralisées*.¹

Si la multiplicité algébrique est finie, alors D_λ est nilpotent, λ est un pôle de la résolvante et λ est une valeur propre. Sinon, λ est une singularité essentielle de la résolvante et λ peut être ou ne pas être une valeur propre.

Pour un opérateur autoadjoint, $P_\lambda, D_\lambda, S_\lambda$ sont symétriques et bornés, donc autoadjoints. Or un opérateur quasinilpotent normal est forcément nul (cf. [Kat76]) donc $D_\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres isolées sont des pôles simples de la résolvante et on montre que les sous-espaces géométrique et algébrique coïncident.

De manière générale, si la valeur propre λ est telle que ses multiplicités géométrique et algébrique coïncident (i.e. s'il n'y a pas de bloc de Jordan associé à λ), alors l'opérateur quasinilpotent D_λ associé est nul.

Exemple A.1 *Un opérateur compact n'a que du spectre discret (sauf peut-être en 0). Un opérateur à résolvante compacte n'a que du spectre discret.*

Nous terminons nos remarques sur le spectre discret par le principe du min-max, qui permet de caractériser les valeurs propres qui sont inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel pour les opérateurs autoadjoints bornés inférieurement, c'est-à-dire les opérateurs autoadjoints pour lesquels l'image numérique est bornée inférieurement.

Proposition A.2 (principe du min-max) *Nous définissons $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec ordre de multiplicité) strictement inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel $\Lambda_e(A)$. Nous définissons $\lambda_n(A)$ par l'une des deux formules suivantes :*

$$\lambda_n(A) = \inf_{V_n \in \mathcal{V}_n(V)} \sup_{u \in V_n, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|_X^2}, \tag{A.15}$$

$$\lambda_n(A) = \sup_{V_{n-1} \in \mathcal{V}_{n-1}(X)} \inf_{u \in V_{n-1}^\perp \cap V, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|_X^2}, \tag{A.16}$$

où $\mathcal{V}_m(Y)$ désigne un sous-espace de Y de dimension m et W^\perp désigne l'orthogonal de W , i.e. $\{u \in X, (u, v)_X = 0, \forall v \in W\}$. $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur A et V est le domaine de la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) $a(\cdot, \cdot)$ associée à A .

¹Attention à ne pas confondre cette notion de fonction propre généralisée avec celle qui est définie en section A.1.5.

Nous avons le résultat suivant :

- $\lambda_n(A)$ est strictement inférieur à la borne inférieure du spectre essentiel si, et seulement si, $\mathcal{N}(A) \geq n$ et dans ce cas, les $\lambda_k(A)$, $k = 1, \dots, n$ sont les n premières valeurs propres.
- $\lambda_n(A)$ est égal à la borne inférieure du spectre essentiel si, et seulement si, $\mathcal{N}(A) < n$ et dans ce cas, $\lambda_k(A)$ est égal à la borne inférieure du spectre essentiel pour tout $k \geq n$.

Nous définissons maintenant la notion de suite de Weyl, qui nous permettra de caractériser le spectre essentiel.

Définition A.1 (suite de Weyl) Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Weyl de A associée à λ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $D(A)$ et satisfait

$$\|u_n\|_X = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad (A - \lambda I)u_n \rightarrow 0 \text{ dans } X.$$

Remarque A.1 : Quand l'espace n'est pas un espace de Hilbert mais uniquement un espace de Banach, la notion de suite de Weyl est généralisée et porte le nom de suite singulière ([EE87, p. 43]) : une suite singulière est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que

$$\|u_n\|_X = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'a pas de sous-suite convergente} \quad \text{et} \quad (A - \lambda I)u_n \rightarrow 0 \text{ dans } X.$$

Terminons par deux propriétés qui permettent de caractériser le spectre essentiel.

Proposition A.3 (critère de Weyl) Soit A un opérateur autoadjoint fermé de domaine dense. $\lambda \in \Lambda_e(A)$ si, et seulement si, on peut construire une suite de Weyl de A associée à λ .

Proposition A.4 (théorème de Weyl) Soit A et K deux opérateurs autoadjoints fermés tels que K est A -compact. Alors $A + K$ est fermé et

$$\Lambda_e(A) = \Lambda_e(A + K).$$

Par ailleurs, le spectre essentiel est l'ensemble des points qui est stable par perturbation compacte, ce qui signifie :

$$\Lambda_e(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{K}(X)} \Lambda(A + B),$$

où $\mathcal{K}(X)$ est l'ensemble des opérateurs compacts sur X .

En conclusion, rappelons les trois caractérisations du spectre essentiel, dans le cadre des opérateurs autoadjoints :

- le spectre privé du spectre discret,
- l'ensemble des points du spectre qui est stable par perturbation compacte,
- l'ensemble des points du spectre caractérisés par des suites de Weyl.

A.1.4 Spectre purement ponctuel, spectre absolument continu, spectre singulièrement continu

Nous considérons A un opérateur autoadjoint (fermé et de domaine dense). Les principales références concernant la décomposition du spectre que l'on va étudier ici sont [DL84], [Kat76, p. 354] et [RS72, p. 263].

Nous commençons par définir la notion de famille spectrale.

Définition A.2 (famille spectrale) Soit X un espace de Hilbert. E défini de l'ensemble des boréliens de \mathbb{R} à valeurs dans l'ensemble des projections orthogonales sur X est une famille spectrale (ou résolution de l'identité) si :

$$E(\emptyset) = 0, \quad E(\mathbb{R}) = I, \quad (\text{A.17})$$

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} J_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(J_j), \quad \forall J_j \text{ boréliens de } \mathbb{R} \text{ disjoints.} \quad (\text{A.18})$$

On montre alors que l'on a : $E(J_1 \cap J_2) = E(J_1)E(J_2)$, $\forall J_1, J_2$ boréliens de \mathbb{R} .

Définition A.3 (mesure réelle associée à une mesure spectrale) À partir d'une mesure spectrale E et à partir d'un vecteur $u \in X$, on peut définir une mesure réelle positive par :

$$\text{mes}_{u,E}(J) = (E(J)u, u)_X, \quad \forall J \text{ borélien de } \mathbb{R}.$$

Comme pour les mesures scalaires, on définit une fonction E_λ , pour $\lambda \in \mathbb{R}$, au lieu d'une mesure $E(J)$, pour J borélien. On peut considérer (formellement) que $E_\lambda = E(J)$, où $J =] - \infty, \lambda[$.

On montre alors qu'étant donnée une mesure spectrale E , il est possible de définir des intégrales spectrales de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda \quad (\text{A.19})$$

pour toute fonction f mesurable. A priori, seul $d(E_\lambda u, u)_X$ est défini pour tout $u \in X$, puis par principe de polarisation, $d(E_\lambda u, v)_X$, pour tout $u, v \in X$. La formule (A.19) n'est donc qu'une notation. En prenant ensuite $f(\lambda) = \lambda$, on définit un opérateur A autoadjoint par

$$(Au, v)_X = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda u, v)_X, \quad \forall u \quad D(A) = \left\{ u \in X, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda u, u)_X < +\infty \right\}, \quad \forall v \in X. \quad (\text{A.20})$$

$\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ est ce qu'on appelle la représentation spectrale de l'opérateur A .

À toute mesure spectrale nous avons associé un opérateur autoadjoint. Le théorème spectral ci-dessous permet de montrer la réciproque : à tout opérateur autoadjoint, on peut associer une mesure spectrale.

Théorème A.1 (théorème spectral) : Soit A un opérateur autoadjoint (borné ou non borné) défini sur X un espace de Hilbert. Alors, il existe une unique mesure spectrale E associée à A telle que :

$$Au = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda u, \quad \forall u \in D(A) = \left\{ u \in X, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda u, u) < +\infty \right\}. \quad (\text{A.21})$$

De plus, pour toute fonction f mesurable, on a :

$$f(A)u = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda u, \quad \forall u \in D(f(A)) = \left\{ u \in X; \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda u, u) < +\infty \right\}. \quad (\text{A.22})$$

La formule (A.22) permet de définir un calcul spectral. Ce calcul spectral est différent du calcul spectral holomorphe défini (A.11). Avec la formule (A.22), f n'a besoin que d'être mesurable. Mais avec la formule (A.11), l'opérateur n'est pas nécessairement autoadjoint.

On montre que le support de E est le spectre de A . L'intégrale sur \mathbb{R} peut donc être remplacée par une intégrale sur $\Lambda(A)$. La formule de Stone (ci-dessous) permet de déterminer la mesure spectrale correspondante à un opérateur autoadjoint donné :

Théorème A.2 (formule de Stone) : Soit A un opérateur autoadjoint (borné ou non borné) défini sur X un espace de Hilbert. Alors, pour $J = [a, b]$, pour $u \in X$,

$$\|E(J)u\|_X^2 = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\eta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a-\eta}^{b+\eta} ([R_A(\lambda + i\varepsilon) - R_A(\lambda - i\varepsilon)] u, u)_X d\lambda. \quad (\text{A.23})$$

Remarque A.2 : Il suffit de changer les bornes de l'intégrale : $a - \eta$ en $a + \eta$ ou/et $b + \eta$ en $b - \eta$ pour obtenir $\|E(I)u\|_X^2$ pour $J =]a, b]$, $J = [a, b[$ ou $J =]a, b[$.

Remarque A.3 : Lorsque l'on cherche à évaluer $E(\{\lambda\})$ pour λ un élément isolé du spectre, alors la formule de Stone nous montre que $E(\{\lambda\}) = P_\lambda$, P_λ étant le projecteur spectral défini par la formule (A.10).

Rappelons maintenant un résultat de théorie de la mesure (cf. [RS72]) :

Proposition A.5 (décomposition des mesures réelles) Soit mes une mesure sur \mathbb{R} . Alors, elle peut être décomposée de manière unique en :

$$\text{mes} = \text{mes}_{pp} + \text{mes}_{ac} + \text{mes}_{sc},$$

où les mesures mes_{pp} , mes_{ac} et mes_{sc} sont caractérisées par :

- mes_{pp} est une mesure purement ponctuelle :

$$\forall J \text{ borélien}, \text{mes}_{pp}(J) = \sum_{x \in J} \text{mes}_{pp}(\{x\}).$$

- mes_{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, notée dx :

$$\exists f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \left(\text{i.e.} \int_a^b |f(x)| dx < +\infty, \forall a, b \in \mathbb{R} \right), \forall g \in L^1(\mathbb{R}; d\text{mes}_{ac}), \int g d\text{mes}_{ac} = \int gf dx.$$

- mes_{sc} est une mesure singulièrement continue par rapport à la mesure de Lebesgue, notée dx :

$$\forall J \text{ borélien}, \forall x \in J, \text{mes}_{sc}(\{x\}) = 0, \text{ et } \exists S \text{ borélien tel que } \int_{\mathbb{R} \setminus S} dx = 0, \text{ et } \text{mes}_{sc}(S) = 0.$$

On montre alors (cf. [RS72]) que l'on a la décomposition suivante $X = X_{pp} \oplus X_{ac} \oplus X_{sc}$, où

$$X_{pp} := \{u \in X, \text{mes}_{u,E} \text{ est purement ponctuelle}\}, \quad (\text{A.24})$$

$$X_{ac} := \{u \in X, \text{mes}_{u,E} \text{ est absolument continue}\}, \quad (\text{A.25})$$

$$X_{sc} := \{u \in X, \text{mes}_{u,E} \text{ est singulièrement continue}\}. \quad (\text{A.26})$$

Voir la définition A.3 pour $\text{mes}_{u,E}$. Chacun de ces sous-espaces est stable par A . On définit alors :

- le spectre purement ponctuel : $\Lambda_{pp}(A) := \Lambda(A|_{X_{pp}})$,
- le spectre absolument continu : $\Lambda_{ac}(A) := \Lambda(A|_{X_{ac}})$,
- le spectre singulièrement continu : $\Lambda_{sc}(A) := \Lambda(A|_{X_{sc}})$.

Ceci nous donne une nouvelle décomposition du spectre :

$$\Lambda(A) = \Lambda_{pp}(A) \oplus \Lambda_{ac}(A) \oplus \Lambda_{sc}(A). \quad (\text{A.27})$$

Nous pouvons démontrer que $\Lambda_p(A) \subset \Lambda_{pp}(A)$. En fait, $\Lambda_{pp}(A) = \overline{\Lambda_p(A)}$ (cf. [RS72, p. 231]).

Exemple A.2 Un opérateur compact (ou à résolvante compacte) autoadjoint n'a que du spectre purement ponctuel. La formule (A.21) devient alors :

$$Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_{\lambda_n} u, \quad \forall u \in D(A) = \left\{ u \in X, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \|P_{\lambda_n} u\|_X^2 < +\infty \right\},$$

où les P_{λ_n} sont les projecteurs spectraux associées aux valeurs propres non nulles. Ceci donne une diagonalisation de l'opérateur A . On a aussi :

$$X = \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \text{Ker}(A - \lambda_n I) \right) \oplus \text{Ker}(A).$$

Il existe donc une base hilbertienne de X constituée des fonctions propres de A .

A.1.5 Complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées

Tout ce que nous allons raconter ici sera simplement formel. Les détails, pour un opérateur A autoadjoint quelconque, peuvent être trouvés dans le livre [BSU96].

L'idée est la suivante : nous savons grâce au théorème spectral que

$$I = \int_{\mathbb{R}} dE_{\lambda} \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda}. \quad (\text{A.28})$$

Nous voulons réécrire ces formules sous la forme suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}} P_{\lambda} d\text{mes}_{\lambda} \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_{\lambda} d\text{mes}_{\lambda}, \quad (\text{A.29})$$

où P_{λ} est un opérateur de projection sur les éventuelles fonctions propres et sur ce qu'on appelle des fonctions propres généralisées et mes est une mesure réelle.

Le fait que l'on puisse écrire cette décomposition est ce qu'on appelle la *complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées*. Nous pouvons écrire « n'importe quoi » comme une somme (continue) de fonctions propres et de fonctions propres généralisées.

La question est maintenant : qu'est-ce qu'une fonction propre généralisée ? Pour définir une fonction propre généralisée, nous définissons un espace de Hilbert $X_{\downarrow} \subset X$, telle que l'injection de X_{\downarrow} dans X est continue et tel que X_{\downarrow} est dense dans X . Nous définissons ensuite X_{\uparrow} le dual de X . Si nous pensons à X comme un espace de type $L^2(\Omega)$, ce qui sera notre cas, on peut voir « avec les mains » X_{\downarrow} comme un espace tel que ses membres sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ auxquelles on demande plus de décroissance à l'infini que dans $L^2(\Omega)$. Pour X_{\uparrow} , on impose, au contraire, moins de décroissance à l'infini que dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, en identifiant X et son dual, nous avons la chaîne d'inclusions suivante :

$$X_{\downarrow} \subset X \subset X_{\uparrow}.$$

Le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_{\uparrow}, X_{\downarrow}}$ entre X_{\uparrow} et X_{\downarrow} est alors une extension du produit scalaire sur X :

$$\langle u, v \rangle_{X_{\uparrow}, X_{\downarrow}} = (u, v)_X, \quad \forall u \in X, \forall v \in X_{\downarrow}.$$

Les *fonctions propres généralisées* sont alors les éléments qui vérifient $u \in X_{\uparrow}$, $u \neq 0$ et

$$\langle u, Av \rangle_{X_{\uparrow}, X_{\downarrow}} = \lambda \langle u, v \rangle_{X_{\uparrow}, X_{\downarrow}}, \quad \forall v \in X_{\downarrow}.$$

Les fonctions propres sont ainsi des cas particuliers de fonctions propres généralisées, puisque $X \subset X_\uparrow$.

De manière générale, la structure du spectre peut être très particulière. Il peut contenir du spectre singulièrement continu par exemple, qui est un objet un peu particulier. Il peut également y avoir des changements de multiplicité du spectre. Le fait de pouvoir passer de (A.28) à (A.29) n'est donc pas évident. Un cas particulier est donné dans l'article [HL07a].²

Terminons cette discussion par le cas d'un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte, où la complétude des fonctions propres est immédiate :

Exemple A.3 (Complétude des fonctions propres pour un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte) *Dans le cas d'un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte, il n'y a que du spectre purement ponctuel. La formule de décomposition (A.29) est alors immédiate : elle a été vue à l'exemple A.2 :*

$$I = \sum_{\lambda_n \in \Lambda(A)} P_{\lambda_n} \quad \text{et} \quad A = \sum_{\lambda_n \in \Lambda(A)} \lambda_n P_{\lambda_n}$$

A.2 SPECTRES ESSENTIELS POUR OPÉRATEURS NON AUTOADJOINTS

A.2.1 Différentes définitions de spectres essentiels

Soit X un espace de Hilbert et A un opérateur fermé à domaine dense. Rappelons déjà ce qui se passe pour un opérateur autoadjoint. On peut définir de différentes manières le spectre essentiel :

- le spectre privé du spectre discret,
- l'ensemble des points du spectre qui est stable par perturbation compacte,
- l'ensemble des points du spectre caractérisés par des suites de Weyl.

On montre que ces trois définitions coïncident. Généralement, ce n'est pas le cas lorsque l'opérateur n'est pas autoadjoint.

Définition A.4 *Nous définissons huit définitions différentes du spectre essentiel :*

- $\Lambda_{e0}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{def}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e1}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{def}(A - \lambda I) < +\infty \text{ ou } \text{nul}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e2}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{nul}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e3}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{ind}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e4}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, } \text{ind}(A - \lambda I) = 0\}$,
- $\Lambda_{e5}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \notin \Lambda_{e4}(A), \lambda \text{ est un point isolé de } \Lambda(A)\}$,
- $\Lambda_{e6}(A) := \mathbb{C} \setminus \text{union de toutes les composantes de } \mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A) \text{ qui intersectent } \rho(A)$,
- $\Lambda_{e7}(A) := \Lambda(A) \setminus \Lambda_{\text{disc}}(A)$.

²Les opérateurs A intervenant dans le chapitre 1 rentrent dans le cadre de cet article, ce qui permet de démontrer la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées pour ces opérateurs.

Remarque A.4 : Λ_{e0} et Λ_{e2} sont les spectres essentiels de Gustafson et de Weidmann [GW69]. Λ_{e1} est le spectre essentiel de Kato [Kat76]. Λ_{e3} est le spectre essentiel de Wolf [GL71, Sch66, Wol59a, Wol59b], Λ_{e4} est le spectre essentiel de Schechter [GL71, GW69, Sch65, Sch66], Λ_{e5} est le spectre essentiel de Browder [GW69, Nus70, Sch66], Λ_{e6} est la dernière définition de spectre essentiel d'Edmunds et Evans [EE87], et Λ_{e7} est la définition de Reed et Simon [HS95, RS80].

Citons maintenant un théorème qui montre des inclusions entre ces différentes définitions.

Théorème A.3 : *Tous les ensembles Λ_{ek} , $k = 0, \dots, 7$ sont fermés et de plus nous avons les inclusions suivantes : (qui sont en général strictes)*

$$\Lambda_{e1}(A) \subset \Lambda_{e2}(A) \subset \Lambda_{e0}(A) \cup \Lambda_{e2}(A) = \Lambda_{e3}(A) \subset \Lambda_{e4}(A) \subset \Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e6}(A) = \Lambda_{e7}(A) \subset \Lambda(A).$$

Démonstration. Voir les théorèmes I.3.18 et I.3.25 dans [EE87] pour montrer que ce sont des ensembles fermés. Voir [GW69] pour le fait que les inclusions sont strictes en général. L'égalité $\Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e6}(A)$ est démontrée dans le théorème IX.1.5 dans [EE87]. Voir le lemme B.1 de l'annexe B de [HL07b] pour l'égalité $\Lambda_{e6}(A) = \Lambda_{e7}(A)$. \square

Remarque A.5 (Spectre continu) : *Si $\lambda \in \Lambda_c(A)$ alors $\text{Im}(A - \lambda I)$ n'est pas fermée. Ainsi, $\Lambda_c(A) \subset \Lambda_{e1}(A)$.*

Remarque A.6 (Spectre résiduel) : *Le spectre résiduel $\Lambda_r(A)$ est inclus dans $\Lambda_{e4}(A)$. En effet, pour voir cela, remarquer que le spectre résiduel est caractérisé par $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{nul}(A - \lambda I) = 0, \text{def}(A - \lambda I) > 0\}$.*

Nous allons commencer par un lemme qui renseigne sur les liens qu'il y a entre le spectre d'un opérateur quelconque A et celui de sa résolvante.

Lemme A.1 (Liens entre le spectre d'un opérateur et le spectre de sa résolvante) *Soit A un opérateur fermé et à domaine dense. Soit $\xi \in \rho(A)$. Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\lambda \in \Lambda(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda(R_A(\xi)). \quad (\text{A.30})$$

$$\lambda \in \Lambda_{e7}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda_{e7}(R_A(\xi)). \quad (\text{A.31})$$

Démonstration. Pour le premier point, l'identité de la résolvante :

$$R_A(\xi) - R_A(\chi) = (\xi - \chi)R_A(\xi)R_A(\chi)$$

nous permet de montrer que

$$\begin{aligned} I &= (\xi - \chi) \left(R_A(\xi) + (\chi - \xi)R_A(\xi)R_A(\chi) - \frac{1}{\chi - \xi}I - R_A(\chi) \right) \\ &= (\xi - \chi) \left(R_A(\xi) - \frac{1}{\chi - \xi}I \right) \left(I + (\chi - \xi)R_A(\xi) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, si ξ et χ sont dans l'ensemble résolvant de A alors $\frac{1}{\chi - \xi}$ est dans l'ensemble résolvant de $R_A(\xi)$. Réciproquement, si $\xi \in \rho(A)$ et $\frac{1}{\chi - \xi} \in \rho(R_A(\xi))$, alors $\chi \in \rho(A)$.

Démontrons maintenant le deuxième point. Soit $f \in X$. Soit $\xi \in \rho(A)$. Il existe donc $u \in D(A)$, $u \neq 0$ tel que $f = (A - \xi I)u \in X$, $f \neq 0$.

On en déduit :

$$u \in D(A), u \neq 0, (A - \xi I)u = (\lambda - \xi)u \Leftrightarrow f \in X, f \neq 0, f = (\lambda - \xi)R_\xi(A)f.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que λ est isolé dans $\rho(A)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda - \xi}$ est isolé dans $\rho(R_A(\xi))$. Et λ est de multiplicité finie pour A si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda - \xi}$ est de multiplicité finie pour $R_A(\xi)$. On en déduit que

$$\lambda \in \Lambda_{disc}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda_{disc}(R_A(\xi)),$$

puis le résultat voulu. \square

Nous allons maintenant énoncer les principaux résultats concernant tous ces spectres essentiels. Ce premier résultat permet de donner une autre caractérisation de Λ_{e4} : ce qui est stable par perturbation compacte.

Proposition A.6 (Invariance par perturbation compacte) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense. Alors,*

$$\Lambda_{e4}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{K}(X)} \Lambda(A + B),$$

où $\mathcal{K}(X)$ est l'ensemble des opérateurs compacts sur X , l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur A est défini.

Démonstration. Voir le théorème IX.1.4 dans [EE87]. \square

Enfin, nous pouvons caractériser $\Lambda_{e2}(A)$ avec les suites de Weyl :

Proposition A.7 (Spectre essentiel caractérisé par les suites de Weyl) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense. $\lambda \in \Lambda_{e2}(A)$ si, et seulement si, il existe une suite de Weyl de A associée à λ .*

Démonstration. Voir le théorème IX.1.3 dans [EE87]. \square

Ainsi, nous avons retrouvé les trois définitions de spectre essentiel que l'on connaît pour les opérateurs autoadjoints. Mais pour des opérateurs non autoadjoints nous n'avons pas l'équivalence entre ces définitions, nous avons uniquement des inclusions.

A.2.2 Propriétés permettant de montrer que les différentes définitions coïncident

Le premier résultat concerne les opérateurs bornés.

Proposition A.8 *Soit A un opérateur borné. On a alors :*

- Si $\Lambda_{e1}(A)$ est dénombrable, alors $\Lambda(A)$ est dénombrable et

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda(A) \setminus \Lambda_{disc}(A), \quad \forall j = 1, \dots, 7.$$

- Si B est un opérateur compact, si l'intérieur de $\Lambda(A)$ est vide, et si chaque composante de $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$ contient un point de $\rho(A + B)$, alors

$$\Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e5}(A + B).$$

Démonstration. Voir le théorème IV.5.33 dans [Kat76] et le lemme XII.4.3 de [RS80]. \square

La proposition qui vient est très importante, elle permet de démontrer que n'importe quelle définition du spectre essentiel coïncide avec la définition Λ_{e7} .

Proposition A.9 Soit A un opérateur fermé de domaine dense. Si, pour $j \in \{1, \dots, 7\}$, chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{ej}(A)$ contient un point de $\rho(A)$, alors

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda(A) \setminus \Lambda_{\text{disc}}(A).$$

Démonstration. Pour $j = 5, 6, 7$, voir la proposition A.3. Pour $j = 1$, voir la section I.4 dans [EE87], en se rappelant que nul et def sont constants sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A)$ sauf sur les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie (voir la section IV.5.6 dans [Kat76]) et en utilisant le fait que l'ensemble résolvant est caractérisé par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée, nul}(A - \lambda I) = \text{def}(A - \lambda I) = 0\}.$$

Pour $j = 2, 3, 4$, utiliser la même procédure, sachant que $\Lambda_{e1}(A) \subset \Lambda_{ej}(A)$ et que chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{ej}(A)$ est incluse dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A)$. \square

Nous finissons par une propriété qui permet d'affirmer que le spectre essentiel (plus précisément Λ_{ej} , pour $j = 1 \dots 4$) d'un opérateur perturbé par un opérateur compact est égal au spectre essentiel de l'opérateur non perturbé.

Proposition A.10 (théorème de Weyl) Soit A un opérateur fermé de domaine dense et soit B un opérateur A -compact. Alors $A + B$ est un opérateur fermé et

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda_{ej}(A + B), \quad \forall j = 1, \dots, 4.$$

Démonstration. Voir le théorème IX.2.1 dans [EE87]. \square

A.2.3 Exemple où les spectres essentiels ne sont pas égaux

Cet exemple est tiré de l'exemple IX.2.2 dans [EE87] (aussi étudié dans [RS80], exemple XIII.4.1). On montre ici que $\Lambda_{e5}(A)$ n'est pas invariant par perturbations A -compactes.

Soit $X = l^2(\mathbb{Z})$ et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base canonique de X . Soit A l'opérateur borné défini par

$$Ae_0 = 0, \quad Ae_j = e_{j-1}, \quad j \neq 0.$$

On vérifie alors que $\|A\| = 1$, donc $\Lambda(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. On a également $\text{nul}(A - \lambda I) = 1$ si $0 \leq |\lambda| < 1$, donc $\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subset \Lambda_{e5}$.

Soit B l'opérateur compact de rang 1 défini par

$$Be_0 = e_{-1}, \quad Be_j = 0, \quad j \neq 0.$$

B est compact et donc A -compact puisque A est un opérateur borné. De plus, $A + B$ est l'opérateur

$$(A + B)e_j = e_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $A + B$ est un opérateur unitaire de X donc son spectre est sur le cercle unité. On a : $\Lambda(A + B) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$. Ainsi, $\Lambda_{e5}(A + B) \neq \Lambda_{e5}(A)$.

Il est donc faux en général que $\Lambda_{e5}(A)$ est invariant par une perturbation A -compacte.

A.3 PSEUDOSPECTRE D'UN OPÉRATEUR

Nous rappelons dans cette sous-section les résultats principaux que nous utilisons à propos du pseudospectre. La référence à ce sujet est le livre de L.N. Trefethen et M. Embree [TE05].

Définition A.5 Soit A un opérateur fermé sur X un espace de Hilbert. Soit $\varepsilon > 0$. Nous définissons le ε -pseudospectre $\Lambda_\varepsilon(A)$ de A de trois manières :

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \|R_A(\lambda)\|_X > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \quad (\text{A.32})$$

$$\{ \lambda \in \mathbb{C}, \exists E \text{ un opérateur borné tel que } \lambda \in \Lambda(A + E) \text{ et } \|E\|_X < \varepsilon \}, \quad (\text{A.33})$$

$$\{ \lambda \in \Lambda(A) \text{ ou } \exists u \in D(A), \|u\|_X = 1, \|Au - \lambda u\|_X < \varepsilon \}. \quad (\text{A.34})$$

Une fonction $u \in D(A)$, telle que $\|u\|_X = 1$ et $\|Au - \lambda u\|_X < \varepsilon$ est appelée une ε -pseudofonction propre et le λ correspondant est une ε -pseudovaleur propre.

A priori les trois définitions sont différentes mais on montre que ces définitions sont équivalentes. La deuxième définition permet de comprendre l'intérêt du pseudospectre, si nous modifions légèrement l'opérateur (nous lui ajoutons une petite perturbation), alors en cherchant le spectre de cet opérateur perturbé, nous allons le trouver dans le pseudospectre de l'opérateur non perturbé.

Dans le cas de matrices, et dans le cas où la norme est la norme euclidienne, nous pouvons caractériser le pseudospectre avec les valeurs singulières de la matrice :

$$\Lambda_\varepsilon(\mathbb{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, s_{\min}(\mathbb{A} - \lambda) < \varepsilon \},$$

où $s_{\min}(\mathbb{B})$ est la plus petite valeur singulière de la matrice \mathbb{B} . On rappelle qu'une valeur singulière est la racine carrée d'une valeur propre de l'opérateur autoadjoint $\mathbb{B}^*\mathbb{B}$.

Détaillons maintenant quelques propriétés du pseudospectre.

Proposition A.11 (propriétés du pseudospectre) Nous avons les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, \Lambda(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A), \quad (\text{A.35})$$

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon(A) = \Lambda(A). \quad (\text{A.36})$$

Proposition A.12 (estimation de la norme de la résolvante) Soit A un opérateur fermé sur X un espace de Hilbert. Nous avons les estimations suivantes :

$$\|R_A(\lambda)\|_X \geq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \Lambda(A))}, \quad (\text{A.37})$$

$$\|R_A(\lambda)\|_X \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \overline{\text{conv}(\Gamma(A))}}, \quad (\text{A.38})$$

où dist est la distance dans le plan complexe, où nous prenons la convention $\|R_A(\lambda)\|_X = \infty$ pour $\lambda \in \Lambda(A)$ et où $\overline{\text{conv}(\Gamma(A))}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'image numérique de A .

Pour un opérateur normal (i.e. pour lequel $AA^* = A^*A$), nous avons en fait l'égalité suivante :

$$\|R_A(\lambda)\|_X = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \Lambda(A))},$$

De cette expression, on voit alors que le pseudospectre est localisé autour du spectre, ce qui n'est pas forcément le cas pour un opérateur non normal. Dans le cas général, ce n'est plus vrai et la norme de la résolvante peut être très grande en des endroits éloignés du spectre.