

Comprendre le *théorème spectral*

(Cours ENSTA MAE 21, notes provisoires)

Christophe Hazard

15 avril 2016

1 Motivation

L’objet de ces notes est de présenter le *théorème spectral* pour les opérateurs auto-adjoints. Ce théorème est un outil essentiel pour la physique, tout particulièrement la physique quantique (on pourrait même dire qu’il s’agit d’un des piliers de la mécanique quantique), mais aussi pour l’étude des phénomènes vibratoires et de propagation d’ondes. Ce théorème généralise la notion de *diagonalisation* d’une matrice hermitienne à un opérateur auto-adjoint quelconque. Il n’est pas question ici de chercher à démontrer ce théorème, mais seulement de donner quelques éléments qui permettent d’en comprendre l’énoncé et de l’utiliser. Il existe différentes formulations de ce théorème. Celle que nous allons présenter, qui est due à Von Neumann (1903–1957), généralise le fait que toute matrice hermitienne A peut être représentée sous la forme

$$A = \sum_n \lambda_n P_n, \quad (1)$$

où les λ_n sont les valeurs propres de A et les P_n sont les projecteurs spectraux associés, c’est-à-dire les projections orthogonales sur les différents sous-espaces propres. Dans le cas d’une matrice, cette somme est évidemment finie. Une telle représentation s’applique encore à tout opérateur auto-adjoint A compact (ou à résolvante compacte). Dans ce cas, comme A possède en général un nombre infini de valeurs propres, la somme est infinie.

Mais que devient cette représentation lorsque le spectre de A comprend un continuum ? En quelque sorte, il s’agit juste de passer du discret au continu, donc de remplacer la somme discrète par une intégrale. C’est précisément ce que nous dit le *théorème spectral*, qui affirme que tout opérateur auto-adjoint peut être représenté sous la forme

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda). \quad (2)$$

Notre but ici est d’expliquer la signification de cette intégrale qui fait intervenir une sorte de “mesure-opérateur” $dE(\lambda)$. On comprend intuitivement que la somme discrète précédente correspond au cas où cette “mesure-opérateur” est purement ponctuelle, c’est-à-dire constituée

d'une somme discrète de masses de Dirac δ_{λ_n} concentrées sur des valeurs propres de A , soit

$$dE(\lambda) = \sum_n P_n \delta_{\lambda_n}(\lambda).$$

Avant d'explorer ce qui se cache derrière la représentation (2), évoquons l'une des conséquences essentielles du théorème spectral, qui concerne la notion de *calcul fonctionnel*. On appelle ainsi toute technique qui permet de calculer des "fonctions d'un opérateur". Dans le cas des matrices hermitiennes, un tel calcul découle de la représentation (1). Par exemple, on a

$$A^2 = \left(\sum_n \lambda_n P_n \right) \left(\sum_m \lambda_m P_m \right) = \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m P_n P_m = \sum_n \lambda_n^2 P_n$$

puisque $P_n P_m = 0$ si $n \neq m$ et $P_n P_n = P_n$. On peut de la même façon exprimer tout polynôme de A ainsi que l'inverse de tout polynôme, ce qui montre que pour toute fonction rationnelle f , on a

$$f(A) = \sum_n f(\lambda_n) P_n.$$

En étendant cette expression à toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie pour tous les λ_n , on a construit un *calcul fonctionnel* de la matrice A . Le *calcul fonctionnel* d'un opérateur auto-adjoint quelconque s'obtient en transposant cette approche à la formule (2). Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, il suffit de poser

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda).$$

Cette façon très simple de construire une fonction d'opérateur possède de nombreuses applications en physique. Considérons par exemple une équation de Schrödinger abstraite. Il s'agit de déterminer une fonction du temps $u = u(t)$ qui vérifie

$$\frac{du}{dt} = iAu \quad \text{pour tout } t.$$

Si A est un nombre réel, la solution de cette équation différentielle est tout simplement

$$u(t) = e^{iAt} u(0).$$

Si A est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H (dans ce cas, u est une fonction de \mathbb{R} dans H), cette expression reste valable mais cette fois, e^{iAt} est l'opérateur défini par

$$e^{iAt} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dE(\lambda)$$

dont nous montrerons plus loin le caractère unitaire. On entrevoit ici la puissance du calcul fonctionnel, qui permet de mener des calculs qui font intervenir un opérateur en remplaçant celui-ci par une simple variable réelle qui décrit le spectre de A .

2 Notion de mesure spectrale

Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} , équipé d'un produit scalaire que nous noterons (\cdot, \cdot) et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

Définition 1. On appelle *mesure spectrale*¹ toute application E de l'ensemble des parties² de \mathbb{R} dans l'ensemble des projections orthogonales sur H qui vérifient les propriétés suivantes³ :

- (i) $E(\emptyset) = 0$ et $E(\mathbb{R}) = \text{Id}$;
- (ii) $E(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(I_n)$ pour toute famille $\{I_n \subset \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ de parties de \mathbb{R} deux à deux disjointes, où la série converge au sens fort⁴ dans H ;
- (iii) $E(I \cap J) = E(I)E(J)$ pour toutes parties I et J de \mathbb{R} .

Nous allons voir qu'à partir de cette définition, on peut construire une intégrale du type

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \quad \text{pour } f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}.$$

Cette construction s'appuie sur la théorie de la mesure dont nous faisons un très bref rappel. On peut la décomposer en trois étapes.

Première étape. Pour tout $u \in H$ et toute partie $I \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\mu_u(I) = (E(I)u, u) = \|E(I)u\|^2 \geq 0,$$

où la seconde égalité découle simplement du fait que $E^2(I) = E(I) = E(I)^*$. D'après les points (i) et (ii) de la définition 1, on a

$$\mu_u(\emptyset) = 0, \quad \mu_u(\mathbb{R}) = \|u\|^2 \quad \text{et} \quad \mu_u(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_u(I_n)$$

pour toute famille $\{I_n \subset \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ de parties de \mathbb{R} deux à deux disjointes. A u fixé, ces propriétés sont précisément celles qui définissent la notion de *mesure finie*⁵ (positive). La théorie de la mesure nous dit qu'à partir de ces seules propriétés, on peut définir une intégrale du type

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_u(\lambda) \quad \text{pour } f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C},$$

par passage à la limite sur des *fonctions étagées*. Ces dernières sont simplement celles qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, autrement dit de la forme

$$f = \sum_{n=1}^N f_n 1_{I_n}, \tag{3}$$

1. Au lieu de *mesure spectrale*, certains ouvrages utilisent les termes de *famille spectrale* ou *résolution de l'identité*.

2. En réalité, on ne peut pas considérer l'ensemble de toutes les parties de \mathbb{R} , mais seulement des parties que l'on sait "mesurer". L'ensemble qu'on considère généralement est la *tribu de Borel*. On appelle *tribu* de \mathbb{R} (ou σ -algèbre) tout ensemble de parties de \mathbb{R} qui est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable. La *tribu de Borel* est la plus petite tribu contenant tous les ouverts. Elle contient donc toutes les unions dénombrables et intersections dénombrables d'ouverts et de fermés. Les éléments de cette tribu sont appelés les *boréliens* de \mathbb{R} .

3. On pourrait retirer l'hypothèse (iii) de cette définition. Elle découle en effet de (ii) et du fait que la somme $P_1 + P_2$ de deux projections orthogonales sur deux sous-espaces fermés H_1 et H_2 de H est une projection orthogonale si et seulement si H_1 et H_2 sont orthogonaux, soit $P_1 P_2 = 0$.

4. C'est-à-dire : $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)u - \sum_{n=0}^N E(I_n)u \right\| = 0$ pour tout $u \in H$.

5. La propriété $\mu_u\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_u(I_n)$ est appelée la σ -*additivité*, le σ faisant référence au caractère dénombrable de l'union considérée. La mesure μ_u est dite finie car $\mu_u(\mathbb{R}) < \infty$.

où $\{I_n \subset \mathbb{R}; n = 1, \dots, N\}$ est une famille finie de parties de \mathbb{R} deux à deux disjointes, les f_n sont des nombres complexes et 1_{I_n} désigne la fonction indicatrice de I_n . Dans ce cas, l'intégrale ci-dessus s'écrit simplement

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_u(\lambda) = \sum_{n=1}^N f_n \mu_u(I_n).$$

On peut construire ainsi l'espace des fonctions intégrables pour la mesure μ_u , constitué des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ pour lesquelles le passage à la limite sur les fonctions étagées est convergent. Ici, la mesure μ_u étant finie, *toutes les fonctions bornées sur \mathbb{R} sont intégrables pour la mesure μ_u* . On dispose aussi des théorèmes habituels de l'intégration, en particulier le théorème de convergence dominée, dont les hypothèses sont identiques au cas de la mesure de Lebesgue.

Deuxième étape. Pour tous u et v dans H et toute partie $I \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\mu_{u,v}(I) = (E(I)u, v) = (u, E(I)v) = (E(I)u, E(I)v).$$

Il n'est pas possible de reproduire dans ce cas la démarche que nous venons de suivre lorsque $u = v$. En effet, la théorie de la mesure requiert la positivité de la mesure, sans quoi le processus de passage à la limite s'écroule. Pour s'en sortir, il suffit de constater que $\mu_{u,v}(I)$ est une forme sesquilinéaire du couple (u, v) . Elle peut donc s'exprimer à l'aide de la forme quadratique associée $\mu_u(I)$ grâce à la formule dite de *polarisation*

$$\mu_{u,v} = \frac{1}{4} (\mu_{u+v} - \mu_{u-v} + i\mu_{u+iv} - i\mu_{u-iv}).$$

Ainsi, on peut définir une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_{u,v}(\lambda)$ que l'on notera désormais

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v) \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\|E(\lambda)u\|^2 \quad \text{si } v = u.$$

Pour une fonction étagée de la forme (3), cette intégrale s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v) = \sum_{n=1}^N f_n (E(I_n)u, v). \quad (4)$$

Proposition 2. *Pour $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ bornée, l'application $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v)$ définit une forme sesquilinéaire continue sur $H \times H$ et l'on a*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v) \right| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \|u\| \|v\|.$$

Démonstration. On se contente de le démontrer pour une fonction étagée (la théorie de la mesure permet de conclure). Soit donc f donnée par (3). Le caractère sesquilinéaire de l'intégrale est évident. Montrons l'inégalité de continuité. D'après (4), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v) \right| &\leq \sum_n |f_n| |(E(I_n)u, E(I_n)v)| \\ &\leq \sup_n |f_n| \sum_n \|E(I_n)u\| \|E(I_n)v\| \\ &\leq \sup_n |f_n| \left(\sum_n \|E(I_n)u\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_n \|E(I_n)v\|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Il reste à remarquer que d'après les propriétés (ii) et (iii) de la définition 1 (et le fait que les intervalles I_n sont disjoints deux à deux),

$$\sum_n \|E(I_n)u\|^2 = \left\| \sum_n E(I_n)u \right\|^2 = \left\| E\left(\bigcup_n I_n\right)u \right\|^2 \leq \|u\|^2,$$

où l'inégalité finale devient une égalité si $\bigcup_n I_n = \mathbb{R}$. \square

Troisième étape. D'après la proposition 2, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ bornée, nous pouvons appliquer le théorème de Riesz qui nous garantit l'existence d'un opérateur borné A_f défini sur H tel que

$$(A_f u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v) \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

Au lieu de A_f , nous noterons $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)$ cet opérateur, de sorte qu'on peut écrire

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)u, v \right) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E(\lambda)u, v).$$

Proposition 3. *Pour toutes fonctions bornées f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , on a les propriétés suivantes :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)g(\lambda) dE(\lambda) \quad (5)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \right)^* = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)} dE(\lambda) \quad (6)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)u \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)u\|^2. \quad (7)$$

Démonstration. Ici encore, nous allons nous contenter de démontrer ces propriétés pour des fonctions étagées. Soient donc f et g définies par

$$f = \sum_{n=1}^N f_n 1_{I_n} \quad \text{et} \quad g = \sum_{m=1}^N g_m 1_{I_m},$$

où l'on a choisi pour les deux sommes la même famille $\{I_n\}$ de parties de \mathbb{R} (deux à deux disjointes). D'après la propriété (iii) de la définition 1, on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dE(\lambda) = \sum_{n,m=1}^N f_n g_m E(I_n)E(I_m) = \sum_{n=1}^N f_n g_n E(I_n),$$

d'où la relation (5). Pour (6), on remarque simplement que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \right)^* = \sum_{n=1}^N \overline{f_n} E(I_n)^* = \sum_{n=1}^N \overline{f_n} E(I_n).$$

Enfin (7) se déduit aisément de (5) et (6). \square

3 Calcul fonctionnel

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment la connaissance d'une mesure spectrale nous permet de construire des fonctions d'un opérateur auto-adjoint.

Le cas des opérateurs bornés. Nous allons dans un premier temps supposer que nous connaissons une mesure spectrale E dont le support est borné. Ceci signifie qu'il existe un intervalle borné I_* tel que E s'annule en dehors de I_* , c'est-à-dire $E(I) = 0$ pour toute partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que $I \cap I_* = \emptyset$. Le plus petit fermé à l'extérieur duquel E s'annule définit le support $\text{supp}(E)$ de E . En particulier, on sait que $E(\text{supp}(E)) = \text{Id}$. Les propositions 2 et 3 restent valables pour des fonctions bornées sur le support de E .

D'après ce qui précède, l'opérateur A défini par

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \quad (8)$$

est un opérateur borné sur H , puisque la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ est bornée sur le support de E . Cette fonction étant réelle, on sait grâce à (6) que A est auto-adjoint. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ bornée sur le support de E , on note

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda).$$

La proposition 3 nous montre que

$$f(A)g(A) = (fg)(A), \quad f(A)^* = \bar{f}(A) \quad \text{et} \quad \|f(A)u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)u\|^2.$$

La première égalité nous montre que cette façon de définir $f(A)$ conduit bien à un calcul fonctionnel de A , au sens où lorsque f est rationnelle, $f(A)$ coïncide avec l'expression que l'on obtient à l'aide de polynômes de A et de leurs inverses.

La seconde égalité entraîne que $f(A)$ est auto-adjoint si f est à valeurs réelles.

Donnons quelques exemples de fonctions de A . Tout d'abord, pour tout $\zeta \in \rho(A)$, la résolvante de A s'écrit

$$R(\zeta) = (A - \zeta \text{Id})^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - \zeta}. \quad (9)$$

Si l'on considère la fonction indicatrice d'une partie $I \subset \mathbb{R}$, on a évidemment

$$1_I(A) = E(I).$$

Enfin l'opérateur e^{iAt} introduit à la fin du paragraphe 1 est bien unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il suffit en effet de constater que

$$e^{i\lambda t} \overline{e^{i\lambda t}} = \overline{e^{i\lambda t}} e^{i\lambda t} = 1,$$

ce qui montre que

$$e^{iAt} (e^{iAt})^* = (e^{iAt})^* e^{iAt} = \text{Id}.$$

Proposition 4. *Le spectre $\sigma(A)$ de A coïncide avec $\text{supp}(E)$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(E)$, la représentation (9) de la résolvante définit bien un opérateur borné puisque la fonction $\lambda \mapsto (\lambda - \zeta)^{-1}$ est bornée sur $\text{supp}(E)$, ce qui montre que $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(E) \subset \rho(A)$, autrement dit que $\sigma(A) \subset \text{supp}(E)$.

Réciproquement, soit $\lambda_* \in \text{supp}(E)$, ce qui revient à dire que $E([\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon]) \neq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. En posant $\varepsilon = 1/n$ et en choisissant pour chaque n un élément non nul de l'image de $E([\lambda_* - 1/n, \lambda_* + 1/n])$, on peut ainsi construire une suite (u_n) de H telle que

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{et} \quad E([\lambda_* - 1/n, \lambda_* + 1/n])u_n = u_n.$$

Il s'ensuit que pour tout $I \subset \mathbb{R}$ tel que $I \cap]\lambda_* - 1/n, \lambda_* + 1/n[= \emptyset$, on a $E(I)u_n = 0$. D'après (7), on en déduit que

$$\|(A - \lambda_* \text{Id})u_n\|^2 = \int_{\lambda_* - 1/n}^{\lambda_* + 1/n} |\lambda - \lambda_*|^2 d\|E(\lambda)u_n\|^2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

On a donc trouvé une suite (u_n) de H telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda_* \text{Id})u_n\| \rightarrow 0$, ce qui montre que $\lambda_* \in \sigma(A)$. \square

Le cas des opérateurs non bornés. Comment le calcul fonctionnel se généralise-t-il lorsque la mesure spectrale E considérée n'est plus à support borné? Dans ce cas, on ne peut plus affirmer que l'opérateur A défini par (8) est borné puisque la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ n'est plus bornée sur le support de E . Cette définition conduit cette fois à un opérateur non borné dont la caractérisation du domaine est suggérée par la relation (7). Nous admettrons que l'opérateur défini par

$$D(A) = \left\{ u \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E(\lambda)u\|^2 < \infty \right\} \quad (10)$$

$$Au = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)u \quad \text{pour tout } u \in D(A) \quad (11)$$

est un opérateur auto-adjoint sur H . De la même façon que précédemment, on peut définir un calcul fonctionnel de A en posant cette fois

$$D(f(A)) = \left\{ u \in H; \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)u\|^2 < \infty \right\} \quad (12)$$

$$f(A)u = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)u \quad \text{pour tout } u \in D(f(A)) \quad (13)$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Les propriétés vues plus haut restent valables en prenant les précautions nécessaires relatives aux domaines des fonctions $f(A)$ considérées.

4 Enoncé du théorème spectral

Nous venons de voir qu'à toute mesure spectrale est associé un opérateur auto-adjoint A défini par (10)-(11). Le théorème spectral nous fournit la réciproque :

Théorème 5 (théorème spectral). *Si $A : D(A) \subset H \mapsto H$ est un opérateur auto-adjoint, alors il existe une (unique) mesure spectrale E telle que toute fonction de A s'exprime sous la forme (12)-(13).*

Ce théorème nous dit en quelque sorte que tout opérateur auto-adjoint est *diagonalisable*, mais il ne nous dit pas comment le diagonaliser, autrement dit, comment trouver la mesure spectrale qui lui est associée. C'est l'objet de la *formule de Stone*. Il existe différentes versions de cette formule qui permettent d'obtenir $E(I)$ pour tous types d'intervalles I . Celle que nous donnons ici a l'avantage de la simplicité.

Proposition 6 (formule de Stone). *Si $A : D(A) \subset H \mapsto H$ est un opérateur auto-adjoint, alors sa mesure spectrale E est donnée par la relation*

$$\frac{1}{2} \{E(]a, b[) + E([a, b])\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda,$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ (la limite étant prise au sens de la limite forte dans H).

Démonstration. Contentons-nous d'une démarche formelle. D'après (9), on a

$$\int_a^b (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda = \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} - \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right) dE(\mu) d\lambda.$$

En permutant les deux intégrales, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_a^b (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\mu) dE(\mu),$$

où on a noté $f_\varepsilon(\mu)$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\mu) &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} - \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{b - \mu}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{a - \mu}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} (1_{]a, b[}(\mu) + 1_{[a, b]}(\mu)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \notin [a, b], \\ 1/2 & \text{si } \mu = a \text{ ou } \mu = b, \\ 1 & \text{si } \mu \in]a, b[. \end{cases}$$

Pour passer à une démonstration rigoureuse, il faut justifier la permutation des deux intégrales et le passage à la limite final, ce qui nécessite simplement de vérifier les conditions d'application de théorèmes du type Fubini et convergence dominée. \square

5 Application : réinventer la transformation de Fourier

Nous allons voir dans ce paragraphe qu'en appliquant le théorème spectral à l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$Au = \frac{1}{i} \frac{du}{dx} \quad \forall u \in D(A) = H^1(\mathbb{R}), \quad (14)$$

on peut retrouver de façon constructive la transformation de Fourier.

Commençons par vérifier la

Proposition 7. *L'opérateur A défini par (14) est auto-adjoint.*

Démonstration. Il est clair que A est symétrique puisque

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i} \frac{du}{dx} \bar{v} \, dx = \int_{\mathbb{R}} u \overline{\frac{1}{i} \frac{dv}{dx}} \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}),$$

autrement dit

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A),$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{R})$. Le fait que $D(A^*) = D(A)$ se vérifie directement à partir de la définition du domaine de l'adjoint :

$$D(A^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}); \exists w \in L^2(\mathbb{R}), \forall v \in D(A), (u, Av) = (w, v)\}.$$

Comme A est symétrique, on sait que $D(A) \subset D(A^*)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in D(A^*)$. En choisissant $v = \bar{\varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans la définition ci-dessus, on sait donc qu'il existe $w \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} u \frac{d\varphi}{dx} \, dx = \int_{\mathbb{R}} w \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ce qu'on peut récrire sous la forme

$$-\langle u, \varphi' \rangle = i \langle w, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ce qui signifie que $u' = iw$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Comme $w \in L^2(\mathbb{R})$, il s'ensuit que $u' \in L^2(\mathbb{R})$, donc que $u \in H^1(\mathbb{R}) = D(A)$. \square

Il s'agit donc maintenant d'appliquer le théorème spectral, plus précisément d'utiliser la formule de Stone pour déterminer la mesure spectrale E associée à notre opérateur. Pour cela, nous devons connaître la résolvante $R(\zeta) = (A - \zeta \text{Id})^{-1}$ pour $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et son comportement lorsque ζ tend vers un point de l'axe réel. Nous allons établir une *représentation intégrale* de $R(\zeta)$ qui fait apparaître $R(\zeta)u$, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, comme le produit de convolution de u par une fonction g_ζ , appelée *fonction de Green* associée à A . Celle-ci est solution de

$$\frac{1}{i} \frac{dg_\zeta}{dx} - \zeta g_\zeta = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (15)$$

où δ désigne la masse de Dirac à l'origine.

Proposition 8. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la seule solution g_ζ appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ de l'équation (15) est donnée par

$$g_\zeta(x) = i\sigma_\zeta Y(\sigma_\zeta x) e^{i\zeta x} \quad \text{où} \quad \sigma_\zeta = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \zeta) = \frac{\operatorname{Im} \zeta}{|\operatorname{Im} \zeta|}$$

et $Y = 1_{\mathbb{R}^+}$ désigne la fonction de Heaviside.

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que $\operatorname{Im} \zeta > 0$. L'équation (15) montre que de part et d'autre de $x = 0$, $g_\zeta(x)$ est nécessairement de la forme $ce^{i\zeta x}$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$. Cette fonction est exponentiellement croissante lorsque $x \rightarrow -\infty$ et décroissante lorsque $x \rightarrow +\infty$. Comme on s'intéresse à une solution qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$, la constante doit s'annuler du côté $x < 0$. Il reste à la déterminer du côté $x > 0$. Pour cela, il suffit de remarquer que d'après la formule des sauts, l'équation (15) entraîne que

$$g_\zeta(0^+) - g_\zeta(0^-) = i,$$

ce qui montre que $c = i$, d'où l'expression annoncée. On procède de même si $\operatorname{Im} \zeta < 0$. \square

Proposition 9. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la résolvante $R(\zeta) = (A - \zeta \operatorname{Id})^{-1}$ de A est caractérisée par la représentation intégrale suivante, valable pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$R(\zeta)u(y) = g_\zeta \star u(y) = \int_{\mathbb{R}} g_\zeta(y-x) u(x) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soient $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$. Dire que $v = R(\zeta)u$ est équivalent à dire que

$$v \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{i} \frac{dv}{dx} - \zeta v = u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (16)$$

En effet, l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ jointe au fait que u et v appartiennent tous les deux à $L^2(\mathbb{R})$ montre que $v \in H^1(\mathbb{R}) = D(A)$ (et donc que v vérifie bien $Av - \zeta v = u$).

Supposons dans un premier temps que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et vérifions que $v = g_\zeta \star u$ satisfait (16). Ce produit de convolution est bien défini et on a, d'après (15) et le fait que δ est l'élément neutre pour la convolution,

$$\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx} - \zeta \right) \{g_\zeta \star u\} = \left\{ \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx} - \zeta \right) g_\zeta \right\} \star u = \delta \star u = u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Vérifions maintenant que $v \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|g_\zeta \star u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g_\zeta(y-x) u(x) dx \right|^2 dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_\zeta(y-x)|^{1/2} |g_\zeta(y-x)|^{1/2} |u(x)| dx \right)^2 dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_\zeta(y-x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g_\zeta(y-x)| |u(x)|^2 dx \right) dy, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effectuant le changement de variable $z = y - x$, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} |g_\zeta(y-x)| dx = \|g_\zeta\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini, il vient

$$\|g_\zeta \star u\|^2 \leq \|g_\zeta\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_\zeta(y-x)| dy \right) |u(x)|^2 dx = \|g_\zeta\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|u\|^2,$$

ce qui montre que $v = g_\zeta \star u$ satisfait (16) lorsque $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité ci-dessus et le fait que la dérivation est continue dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ montrent que $v = g_\zeta \star u$ satisfait encore (16) lorsque $u \in L^2(\mathbb{R})$. \square

Nous disposons donc maintenant d'une expression explicite de la résolvante de A que nous allons pouvoir reporter dans la formule de Stone. Nous écrivons cette dernière sous forme faible, soit, en notant $e_{a,b}(u, v) = (\{E([a, b]) + E([a, b])\}u, v)/2$,

$$\begin{aligned} e_{a,b}(u, v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b (\{R(\lambda + i\varepsilon)u - R(\lambda - i\varepsilon)u\}, v) d\lambda, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \{g_{\lambda+i\varepsilon}(y-x) - g_{\lambda-i\varepsilon}(y-x)\} u(x) dx \overline{v(y)} dy d\lambda. \end{aligned}$$

Supposons que u et v appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour permuter la limite avec les différentes intégrales. On obtient ainsi

$$e_{a,b}(u, v) = \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{\lambda+i\varepsilon}(y-x) - g_{\lambda-i\varepsilon}(y-x)}{2i\pi} \right) u(x) dx \overline{v(y)} dy d\lambda, \quad (17)$$

La proposition suivante, qui exprime la différence des limites de la fonction de Green de part et d'autre de l'axe réel, montre qu'on va pouvoir séparer les intégrales selon x et y .

Proposition 10. *La fonction de Green g_ζ admet des limites unilatérales $g_{\lambda \pm i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{\lambda \pm i\varepsilon}$ qui vérifient*

$$\frac{g_{\lambda+i0}(y-x) - g_{\lambda-i0}(y-x)}{2i\pi} = \overline{w_\lambda(x)} w_\lambda(y) \quad \text{où} \quad w_\lambda(x) = \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (18)$$

Démonstration. D'après la proposition 8, il est clair que $g_{\lambda \pm i0}(x) = \pm iY(\pm x) e^{i\lambda x}$ et par conséquent,

$$g_{\lambda+i0}(x) - g_{\lambda-i0}(x) = i e^{i\lambda x},$$

d'où l'expression annoncée. \square

On peut remarquer que la différence des limites unilatérales de la fonction de Green, autrement dit le *saut de la fonction de Green*, est une fonction régulière (C^∞) alors que chacune des limites présente une discontinuité lorsque $x = y$.

En reportant l'expression (18) dans (17), on obtient

$$e_{a,b}(u, v) = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{w_\lambda(x)} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{v(y)} w_\lambda(y) dy \right) d\lambda = \int_a^b \mathcal{F}u(\lambda) \overline{\mathcal{F}v(\lambda)} d\lambda,$$

où on a noté

$$\mathcal{F}u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{w_\lambda(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

On reconnaît évidemment ici la transformée de Fourier de u .

La relation ci-dessus montre en particulier que lorsque b tend vers a , la quantité $e_{a,b}(u, v)$ tend vers 0. Par conséquent $E(\{a\}) = 0$, ce qui signifie que la mesure spectrale ne comporte pas de composante ponctuelle. On en déduit que

$$(E([a, b])u, v) = (E([a, b])u, v) = \int_a^b \mathcal{F}u(\lambda) \overline{\mathcal{F}v(\lambda)} d\lambda.$$

En d'autres termes, nous venons de démontrer le

Théorème 11. *Pour tous $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la mesure spectrale de A est donnée par la relation⁶*

$$d(E(\lambda)u, v) = \mathcal{F}u(\lambda) \overline{\mathcal{F}v(\lambda)} d\lambda \quad \text{où} \quad \mathcal{F}u(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (19)$$

Cette expression de la mesure spectrale se prolonge à des fonctions u et v dans $L^2(\mathbb{R})$ si l'on sait prolonger $\mathcal{F}u(\lambda)$. Ce résultat bien connu découle du théorème spectral. Montrons en effet le

Théorème 12. *La transformation \mathcal{F} définie par (19) pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se prolonge par densité en un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$, encore notée \mathcal{F} , qui diagonalise A au sens où*

$$f(A) = \mathcal{F}^* f(\lambda) \mathcal{F} \quad \text{pour toute fonction bornée } f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}. \quad (20)$$

Dans cette expression, $f(\lambda)$ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction f dans $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$.

Démonstration. Compte tenu de l'expression (19) de la mesure spectrale, le théorème spectral nous dit que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ bornée,

$$(f(A)u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \mathcal{F}u(\lambda) \overline{\mathcal{F}v(\lambda)} d\lambda = (f(\lambda) \mathcal{F}u, \mathcal{F}v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (21)$$

où on a encore noté (\cdot, \cdot) le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$. Si l'on choisit $f(\lambda) = 1$, soit $f(A) = \text{Id}$, on a alors

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}u(\lambda) \overline{\mathcal{F}v(\lambda)} d\lambda = (\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ce qui montre que \mathcal{F} est une isométrie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, elle se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$, encore notée \mathcal{F} . La relation (21) reste donc valable pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R})$. On a par conséquent

$$(f(A)u, v) = (\mathcal{F}^* f(\lambda) \mathcal{F}u, v) \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}),$$

d'où la forme diagonale (20) de $f(A)$. Notons que si, dans cette dernière formule, on remplace $f(A)$ par $\bar{f}(A)$ $f(A) = f(A)^* f(A)$ et on choisit $u = v$, on obtient

$$\|f(A)u\| = \|f(\lambda) \mathcal{F}u\| \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}). \quad (22)$$

6. La relation (19) montre que la mesure spectrale est *absolument continue* (par rapport à la mesure de Lebesgue). Une mesure μ est dite *absolument continue* si $d\mu(\lambda) = f(\lambda) d\lambda$ où f est localement intégrable.

Jusqu'ici nous avons montré que \mathcal{F} est une isométrie. Pour montrer que cette transformation est unitaire, il reste à vérifier qu'elle est surjective. Pour cela, nous avons besoin de récrire l'expression diagonale (20) de $f(A)$ sous la forme⁷

$$\mathcal{F} f(A) = f(\lambda) \mathcal{F}, \quad (23)$$

ce qui découle du fait que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\|\mathcal{F} f(A)u - f(\lambda) \mathcal{F}u\|^2 = \|\mathcal{F} f(A)u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\mathcal{F} f(A)u, f(\lambda) \mathcal{F}u) + \|f(\lambda) \mathcal{F}u\|^2 = 0$$

puisque d'une part, d'après (22) et le caractère isométrique de \mathcal{F} , on a

$$\|\mathcal{F} f(A)u\|^2 = \|f(A)u\|^2 = \|f(\lambda) \mathcal{F}u\|^2,$$

et d'autre part, d'après (20),

$$(\mathcal{F} f(A)u, f(\lambda) \mathcal{F}u) = (f(A)u, \mathcal{F}^* f(\lambda) \mathcal{F}u) = \|f(A)u\|^2.$$

Montrons maintenant la surjectivité de \mathcal{F} . Supposons que $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}_\lambda)$ est orthogonal à l'image de \mathcal{F} , autrement dit que

$$(\hat{u}, \mathcal{F}v) = 0 \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dans cette expression, on peut remplacer évidemment v par $E(I)v$ pour n'importe quel $I \subset \mathbb{R}$. D'après (23), il vient

$$(\hat{u}, \mathcal{F}E(I)v) = (\hat{u}, 1_I \mathcal{F}v) = 0 \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall I \subset \mathbb{R}.$$

En se limitant à des fonctions $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a donc, d'après le théorème de Fubini,

$$0 = \int_I \hat{u}(\lambda) \overline{\int_{\mathbb{R}} v(x) e^{-i\lambda x} dx} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{v(x)} \left(\int_I \hat{u}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right) dx.$$

Cette relation étant vérifiée pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il s'ensuit que

$$\int_I \hat{u}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0 \quad \forall I \subset \mathbb{R},$$

et par conséquent $\hat{u}(\lambda) e^{i\lambda x}$ pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\hat{u} = 0$. \square

La démarche que nous venons de suivre pour réinventer la transformation de Fourier se généralise à de nombreux autres opérateurs auto-adjoints. En pratique, on peut ainsi diagonaliser des opérateurs différentiels à coefficients variables, ce que la transformation de Fourier usuelle ne permet pas de faire.

En théorie, les résultats obtenus dans ce paragraphe se généralisent à n'importe quel opérateur auto-adjoint A , au sens où il existe toujours une transformation unitaire \mathcal{F} , appelée *transformation de Fourier généralisée*, qui diagonalise A au sens de la relation (20). Cette relation nous dit que \mathcal{F} transforme l'action de A en une simple multiplication par la variable spectrale λ qui décrit le spectre de A . Cette multiplication a lieu dans un *espace spectral* dont la structure peut être beaucoup plus complexe que le cas de $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$ évoqué ici pour la transformation de Fourier usuelle. L'existence d'une *transformation de Fourier généralisée* adaptée à chaque opérateur auto-adjoint constitue une version différente du théorème spectral, souvent appelée *forme multiplicative*.

7. On ne peut déduire directement la formule (23) de (20) en lui appliquant \mathcal{F} car on ne sait pas encore que $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$ est l'identité sur $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$. Cet opérateur est en fait la projection orthogonale sur l'image de \mathcal{F} et on cherche justement à montrer que celle-ci recouvre l'espace $L^2(\mathbb{R}_\lambda)$ tout entier!